Exercícios Resolvidos de Dinâmica Clássica

Jason Alfredo Carlson Gallas, professor titular de física teórica,

Doutor em Física pela Universidade Ludwig Maximilian de Munique, Alemanha

Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Instituto de Física

Matéria para a QUARTA prova. Numeração conforme a **quarta** edição do livro "Fundamentos de Física", Halliday, Resnick e Walker.

Esta e outras listas encontram-se em: *http://www.if.ufrgs.br/~jgallas*

Conteúdo

Comentários/Sugestões e Erros: favor enviar para `jgallas @ if.ufrgs.br`

(`listam3.tex`)

16 Fluidos

16.1 Problemas e Exercícios

16.1.1 Densidade e Pressão

E 16-3 (15-1/6^a edição)

Encontre o aumento de pressão de um fluido em uma seringa quando uma enfermeira aplica uma força de 42 N ao êmbolo da seringa, de raio 1.1 cm.

▶ O aumento de pressão é a força aplicada dividida pela área, isto é, $\Delta p = F/A = F/(\pi r^2)$, onde r é o raio do pistão da seringa. Portanto

$$\Delta p = \frac{42}{\pi(0.011)^2} = 1.1 \times 10^5 \text{ Pa}.$$

E 16-5 (15-3/6^a edição)

A janela de um escritório tem dimensões de 3.4 m por 2.1 m. Como resultado de uma tempestade, a pressão do ar do lado de fora cai para 0.96 atm, mas a pressão de dentro permanece de 1 atm. Qual o valor da força que puxa a janela para fora?

▶ O ar de dentro empurra a janela para fora com uma força dada por $p_d A$, onde p_d é a pressão dentro do escritório e A é a área da janela. Analogamente, o ar do lado de fora empurra para dentro com uma força dada por $p_f A$, onde p_f é a pressão fora. A magnitude da força líquida é, portanto,

$$\begin{aligned} F &= (p_d - p_f)A \\ &= (1 - 0.96)(1.013 \times 10^5)(3.4)(2.1) \\ &= 2.9 \times 10^4 \text{ N}, \end{aligned}$$

onde usamos o fato que 1 atm $= 1.013 \times 10^5$ Pa.

P 16-7 (15-??/6^a edição)

Uma caixa vedada com uma tampa de 12 pol^2 de área é parcialmente evacuada. Se uma força de 108 libras é necessária para tirar a tampa da caixa e a pressão atmosférica do exterior é de 15 lib/pol^2, qual é a pressão do ar na caixa?

▶ A magnitude da força necessária para tirar a tampa é

$$F = (p_f - p_i)A,$$

onde p_f é a pressão fora, p_i é a pressão interna, e A é a área da tampa. Isto fornece-nos

$$p_i = p_f - \frac{F}{A} = 15 - \frac{108}{12} = 6 \text{ lb/pol}^2.$$

Observe que como p_f foi dada em lb/pol^2 e A é dada em pol^2, não foi necessário converter-se unidades. A resposta final, é óbvio, *não* está no SI.

P 16-8 (15-7/6^a edição)

Em 1654, Otto von Guericke, burgomestre (prefeito) de Magdeburg e inventor da bomba de vácuo, deu uma demonstração pública para provar sua tese de que dois grupos de oito cavalos não seriam capazes de separar dois hemisférios de latão unidos, dentro dos quais se fez vácuo. Realmente, os cavalos não conseguiram separar os hemisférios. **(a)** Pressupondo que os hemisférios tenham paredes finas, de forma que R na Fig. 16-34 possa ser considerado o raio interno e externo, mostre que a força necessária para separar os hemisférios é $F = \pi R^2 \Delta p$, onde Δp é a diferença entre as pressões interna e externa na esfera. **(b)** Fazendo R igual a 30 cm e a pressão interna como 0.10 atm, encontre a força que os cavalos teriam de exercer para separar os hemisférios. **(c)** Por que foram usados dois grupos de cavalos? Apenas um grupo não provaria a tese da mesma forma?

▶ Em cada ponto sobre a superfície dos hemisférios existe uma força líquida para dentro, normal à superfície, devida à diferença de pressão entre o ar dentro e fora da esfera. Para poder separar os dois hemisférios cada conjunto de cavalos precisa exercer uma força que tenha uma componente horizontal pelo menos igual à soma das componentes horizontais de todas as forças que atuam sobre o hemisfério que puxam.
Considere uma força que atua no hemisfério puxado para a direita e que faça um ângulo θ com a horizontal. Sua componente horizontal é $\Delta p \cos\theta dA$, onde dA é um elemento infinitesimal de área no ponto onde a força está aplicada. Tomamos tal área como sendo a área do anel com θ constante na superfície. O raio do anel é R sen θ, onde R é o raio da esfera. Se a largura angular do anel é $d\theta$,

em radianos, então sua largura é $Rd\theta$ e sua área é $dA = 2\pi R^2$ sen $\theta\ d\theta$. Com isto, a componente horizontal líquida a força do ar é dada por

$$\begin{aligned} F_h &= 2\pi R^2 \Delta p \int_0^{\pi/2} \text{sen}\theta \cos\theta \, d\theta \\ &= \pi R^2 \Delta p \, \text{sen}^2\theta \Big|_0^{\pi/2} = \pi R^2 \Delta p. \end{aligned}$$

Esta é a força mínima que deve ser exercida por cada conjunto de cavalos para conseguir separar os hemisférios.

(b) Lembrando que 1 atm $= 1.013 \times 10^5$ Pa, temos

$$F_h = \pi(0.3)^2(0.90)(1.013 \times 10^5) = 25.77 \times 10^3 \text{ N}.$$

(c) Um conjunto de cavalos teria sido suficiente se um dos hemisférios tivesse sido amarrado a uma árvore grande ou a um prédio. Dois conjuntos de cavalos foram provavelmente usados para aumentar o efeito dramático da demonstração.

16.1.2 Fluidos em Repouso

E 16-11 (15-9/6^a)

As saidas dos canos de esgotos de uma casa construída em uma ladeira estão 8.2 m abaixo do nível da rua. Se o cano de esgoto se encontra a 2.1 m abaixo do nível da rua, encontre a diferença de pressão mínima que deve ser criada pela bomba de recalque para puxar esgoto de densidade média 900 kg/m^3.

► Considere o bombeamento no cano num instante qualquer. A força mínima da bomba é aquela que serve para equilibrar a força da gravidade no esgoto com a força da bomba no cano. Sob tal força mínima o esgoto será empurrado sem mudar sua energia cinética.

A força da gravidade no esgoto é $\rho g \ell A$, onde ρ é a sua densidade, ℓ $(= 8.2 - 2.1 = 6.1$ m$)$ é o comprimento do cano, e A é a área da secção reta do cano. Se p_0 for a pressão no cano, então $p_0 A$ é a força que empurra o esgoto para baixo no cano. Se p for a pressão exercida pela bomba, então a força da bomba no esgoto é pA.

A força líquida no esgoto é dada por

$$(p - p_0)A - \rho g \ell A$$

e p será mínima quando ela anular-se. Portanto, vese que a diferença de pressão que deve ser mantida pela bomba é

$$p - p_0 = \rho g \ell = (900)(9.8)(6.1) = 5.4 \times 10^4 \text{ Pa}.$$

E 16-16 (15-13/6^a)

Membros da tripulação tentam escapar de um submarino danificado, 100 m abaixo da superfície. Que força eles têm de aplicar no alçapão, de 1.2 m por 0.60 m, para empurrá-lo para fora? Considere a densidade da água do oceano 1025 kg/m^3.

► A pressão p na profundidade d do alçapão é $p_0 + \rho g d$, onde ρ é a densidade da água do oceano e p_0 é a pressão atmosférica. A força para baixo da água no alçapão é $(p_0 + \rho g d)A$, onde A é a área do alçapão. Se o ar no submarino estiver na pressão atmosférica, então exercerá uma força $p_0 A$ para cima. A força mínima que deve ser aplicada pela tripulação para abrir o alçapão tem magnitude dada por

$$\begin{aligned} F &= (p_0 + \rho g d)A - p_0 A \\ &= \rho g d A \\ &= (1025)(9.8)(100)(1.2)(0.60) = 7.2 \times 10^5 \text{ N}. \end{aligned}$$

P 16-18 (15-15/6^a)

Dois vasos cilíndricos idênticos, com suas bases ao mesmo nível, contêm um líquido de densidade ρ. A área da base é A para ambos, mas em um dos vasos a altura do líquido é h_1 e no outro é h_2. Encontre o trabalho realizado pela força gravitacional ao igualar os níveis, quando os dois vasos são conectados.

► Quando os níveis são os mesmos a altura do líquido é $h = (h_1 + h_2)/2$, onde h_1 e h_2 são as alturas originais. Suponha que h_1 é maior do que h_2. A situação final pode ser atingida tomando-se um porção de líquido com volume $A(h_1 - h)$ e massa $\rho A(h_1 - h)$, no primeiro vaso, e baixando-a por uma distância $h - h_2$. O trabalho feito pela força da gravidade é

$$W = \rho A(h_1 - h)g(h - h_2).$$

Substituindo-se $h = (h_1 + h_2)/2$ nesta expressão achamos o resultado pedido:

$$W = \frac{1}{4}\rho g A(h_1 - h_2)^2.$$

P 16-21 (15-17/6^a)

Enunciado.... aqui aqui....

▶ Seja $p_a = p_b$. Então

$$\rho_c g(6+32+D) + \rho_M(y-D) = \rho_c g(32+D) + \rho_M(y-D),$$

donde obtemos que

$$D = \frac{6\,\rho_c}{\rho_M - \rho_c} = \frac{(6)(2.9)}{3.3-2.9} = 44 \text{ km}.$$

Cuidado com unidades de ρ aqui: g/cm^3.

P 16-22 (15-17/6^a)

Na Fig. 16-38, o oceano está a ponto de invadir o continente. Encontre a profundidade h do oceano, usando o método do nível de compensação mostrado no Problema 16-21.

▶ Suponha que a pressão é a mesma em todos pontos a uma distância $d = 20$ km abaixo da superfície. Para pontos no lado esquerdo da figura tal presão é dada por

$$p = p_0 + \rho_0 g h + \rho_c g d_c + \rho_m g d_m,$$

onde p_0 é a pressão atmosférica, ρ_0 é a densidade da água do oceano e h é a profundidade do oceano, ρ_c é a densidade da crosta e d_c a espessura da crosta, e ρ_m é a densidade do manto e d_m é a espessura do manto (até uma profundidade de 20 km). Para pontos no lado direito da figura, p é dada por

$$p = p_0 + \rho_c g d.$$

Igualando estas duas expressões para p e cancelando g obtemos que

$$\rho_c d = \rho_0 h + \rho_c d_c + \rho_m d_m.$$

Substituindo $d_m = d - h - d_c$, tem-se que

$$\rho_c d = \rho_0 h + \rho_c d_c + \rho_m d - \rho_m h - \rho_m d_c,$$

de onde tiramos

$$\begin{aligned} h &= \frac{\rho_c d_c - \rho_c d + \rho_m d - \rho_m d_c}{\rho_m - \rho_0} \\ &= \frac{(\rho_m - \rho_c)(d - d_c)}{\rho_m - \rho_0} \\ &= \frac{(3.3-2.8)(20-12)}{3.3-1.0} = 1.7 \text{ km}. \end{aligned}$$

Observe que acima substituimos km, não m.

P 16-23 (15-19/6^a)

A água se encontra a uma profundidade P abaixo da face vertical de um dique, como ilustra a Fig. 16-39. Seja W a largura do dique. **(a)** Encontre a força horizontal resultante exercida no dique pela pressão manométrica da água e **(b)** o torque resultante devido a esta pressão em relação ao ponto O. **(c)** Encontre o braço de alavanca, em relação ao ponto O, da força horizontal resultante sobre o dique.

▶

16.1.3 O Princípio de Arquimedes

E 16-31 (15-??/6^a)

Uma lata tem volume de 1200 cm^3 e massa de 130 g. Quantas gramas de balas de chumbo ela poderia carregar, sem que afundasse na água? A densidade do chumbo é 11.4 g/cm^3.

▶ Seja m_ℓ a massa da lata e m_c a massa do chumbo. A força da gravidade sobre o sistema 'lata + chumbo' é $(m_\ell + m_c)g$ e a força de empuxo da água é $\rho g V$, onde ρ (= 998 kg/m^3) é a densidade da água e V é o volume de água deslocada.
No equilíbrio, estas forças balanceiam-se de modo que

$$(m_\ell + m_c)g = \rho g V.$$

A lata irá conter a maior massa de chumbo quando estiver quase por afundar de modo que o volume da água deslocada coincide então como o volume da lata. Portanto

$$\begin{aligned} m_c = \rho V - m_\ell &= (998)(1200 \times 10^{-6}) - 0.130 \\ &= 1.07 \text{ kg}. \end{aligned}$$

Perceba que 1200 cm^3 = 1200×10^{-6} m^3.

E 16-34 (15-25/6^a)

Uma âncora de ferro, quando totalmente imersa na água, parece 200 N mais leve que no ar. **(a)** Qual é o volume da âncora? **(b)** Qual é o peso no ar? A densidade do ferro é 7870 kg/m^3.

▶ **(a)** O problema diz que a âncora está totalmente debaixo da água. Ela aparenta ser mais leve porque a água empurra-a para cima com um empuxo de $\rho_a g V$, onde ρ_a é a densidade da água e V é o volume da âncora. Seu peso efetivo dentro da água é

$$P_e = P - m_f\, g = P - \rho_a g V,$$

onde P é o seu peso verdadeiro (força da gravidade fora da água). Portanto

$$V = \frac{P - P_e}{\rho_a g} = \frac{200}{(998)(9.8)} = 2.045 \times 10^{-2}\ \text{m}^3.$$

(b) A massa da âncora é $m = \rho V$, onde ρ é a densidade do ferro. Seu peso no ar é

$$\begin{aligned} P = mg = \rho g V &= (7870)(9.8)(2.045 \times 10^{-2}) \\ &= 1.58 \times 10^3\ \text{N}. \end{aligned}$$

P 16-43 (15-33/6^a)

Uma matriz fundidora de ferro, contendo um certo número de cavidades, pesa 6000 N no ar e 4000 N na água. Qual é o volume das cavidades da fundidora? A densidade do ferro é 7.87 g/cm^3.

▶ O volume V_c das cavidades é a diferença entre o volume V_m da matriz fundidora como um todo e o volume V_F do ferro contido na matriz fundidora:

$$V_c = V_m - V_F.$$

O volume do ferro é dado por $V_F = P/(g\rho_F)$, onde P é o peso da matriz fundidora e ρ_F é a densidade do Ferro.

O peso efetivo P_e na água pode ser usado para encontrar o volume da matriz fundidora. Ele é menor do que P pois a água empurra a matriz fundidora com uma força $g\rho_a V_m$, onde ρ_a representa a densidade da água. Assim temos o peso efetivo dado por

$$P_e = P - g\rho_a V_m.$$

Portanto

$$V_m = \frac{P - P_e}{g\rho_a},$$

de onde tiramos que

$$\begin{aligned} V_c &= \frac{P - P_e}{g\rho_a} - \frac{P}{g\rho_F} \\ &= \frac{6000 - 4000}{(9.8)(0.998 \times 10^3)} - \frac{6000}{(9.8)(7.87 \times 10^3)} \\ &= 0.127\ \text{m}^3 \end{aligned}$$

É imprescindível saber fazer corretamente as conversões de unidades:

$$7.87\ \text{g/cm}^3 = \frac{7.87 \times 10^{-3}\ \text{kg}}{10^{-6}\ \text{m}^3} = 7.87 \times 10^3\ \text{kg/m}^3.$$

16.1.4 Linhas de Corrente e a Equação da Continuidade

E 16-55 (15-39/6^a)

Uma mangueira de jardim, de diâmetro interno 0.75 pol, é conectada a um esguicho que consiste em um cano com 24 furos, cada um com 0.050 pol de diâmetro. Se a água na mangueira tiver velocidade de 3 pés/s, com que velocidade ela sairá dos buracos do esguicho?

▶ Use a equação da continuidade. Seja v_1 a velocidade da água na mangueira e v_2 sua velocidade quando ela deixa um dos furos. Seja A_1 a área da secção reta da mangueira. Como existem n furos, podemos imaginar a água na mangueira como formando n tubos de fluxo, cada um indo sair através de um dos furos. A área de cada tubo de fluxo é A_1/n. Se A_2 for a área de um furo, a equação da continuidade fica sendo dada por

$$v_1 \frac{A_1}{n} = v_2 A_2.$$

Desta expressão tiramos que

$$v_2 = \frac{A_1}{nA_2} v_1 = \frac{R^2}{n\, r^2} v_1,$$

onde R é o raio da mangueira e r é o raio de um furo. Portanto

$$v_2 = \frac{R^2}{n\, r^2} v_1 = \frac{(0.375)^2}{24(0.025)^2}(3.0) = 28\ \text{pés/s}.$$

Converter para os valores MKS dados na 6^a edição!

P 16-56 (15-41/6^a)

A água é bombeada continuamente para fora de um porão inundado, a uma velocidade de 5 m/s, através de uma mangueira uniforme de raio 1 cm. A mangueira passa por uma janela 3 m acima do nível da água. Qual é a potência da bomba?

▶ Suponha que uma massa Δm de água é bombeada num tempo Δt. A bomba aumenta a energia potencial da água por Δmgh, onde h é a distância vertical que a água é elevada, e aumenta sua energia cinética de $\Delta mv^2/2$, onde v é sua velocidade final. O trabalho que a bomba faz é

$$\Delta W = \Delta mgh + \frac{1}{2}\Delta mv^2,$$

e sua potência é, consequentemente,

$$P = \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{\Delta m}{\Delta t}\Big(gh + \frac{1}{2}v^2\Big).$$

A taxa de fluxo de massa é $\Delta m/\Delta t = \rho Av$, onde ρ é a densidade da água e A é a área da secção transversal da mangueira, isto é,

$$A = \pi r^2 = \pi(0.010)^2 = 3.14 \times 10^{-4} \text{ m}^2.$$

Com isto, temos

$$\rho Av = (998)(3.14 \times 10^{-4})(5) = 1.57 \text{ kg/s}.$$

Portanto

$$\begin{aligned} P &= \frac{\Delta m}{\Delta t}\Big(gh + \frac{1}{2}v^2\Big) \\ &= (1.57)\Big[(9.8)(3.0) + \frac{5^2}{2}\Big] = 66 \text{ W}. \end{aligned}$$

16.1.5 Aplicações da Equação de Bernoulli

E 16-58 (15-43/6^a)

A água se move com uma velocidade de 5 m/s através de um cano com uma área de seção transversal de 4 cm^2. A água desce 10 m gradualmente, enquanto a área do cano aumenta para 8 cm^2. **(a)** Qual é a velocidade do escoamento no nível mais baixo? **(b)** Se a pressão no nível mais alto for 1.5×10^5 Pa, qual será a pressão no nível mais baixo?

▶ **(a)** Use a equação da continuidade: $A_1 v_1 = A_2 v_2$, onde A_1 é a área do cano no topo e v_1 a velocidade da água no local, A_2 é a área do cano no fundo e v_2 é a velocidade da água no fundo. Portanto,

$$v_2 = \frac{A_1}{A_2}\, v_1 = \frac{4}{8}(5) = 2.5 \text{ m/s}.$$

(b) Use a equação de Bernoulli:

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g h_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g h_2,$$

onde ρ é a densidade da água, h_1 sua altura inicial e h_2 sua altura final. Portanto,

$$\begin{aligned} p_2 &= p_1 + \frac{1}{2}\rho(v_1^2 - v_2^2) + \rho g(h_1 - h_2) \\ &= 1.5 \times 10^5 + \frac{1}{2}(0.998 \times 10^3)\big[5^2 - (2.5)^2\big] \\ &\qquad +(0.998 \times 10^3)(9.8)(10) \\ &= 2.6 \times 10^5 \text{ Pa}. \end{aligned}$$

E 16-67 (15-49/6^a)

Se a velocidade de escoamento, passando por debaixo de uma asa, é 110 m/s, que velocidade de escoamento na parte de cima criará uma diferença de pressão de 900 Pa entre as superfícies de cima e de baixo? Considere a densidade do ar $\rho = 1.3 \times 10^{-3}$ g/cm^3. (Ver exercício 16-66.)

▶ Use a equação de Bernoulli desprezando os termos de energia potencial, pois os dois tubos de fluxo estão essencialmente na mesma altitude:

$$p_\ell + \frac{1}{2}\rho v_\ell^2 = p_u + \frac{1}{2}\rho v_u^2,$$

onde p_ℓ é a pressão na superfície de baixo, p_u a pressão em superfície de cima, v_ℓ a velocidade do ar na superfície de baixo, v_u a velocidade do ar na superfície de cima, e ρ a densidade do ar.
Desejamos encontrar v_u de modo que $p_\ell - p_u = 900$ Pa, ou seja,

$$\begin{aligned} v_u &= \sqrt{\frac{2(p_\ell - p_u)}{\rho} + v_\ell^2} \\ &= \sqrt{\frac{2(900)}{1.3} + (110)^2} = 116 \text{ m/s}. \end{aligned}$$

Observe que é imprescindível usar as unidades corretas de ρ:

$$\rho = 1.3 \times 10^{-3}\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3} = 1.3 \times 10^{-3}\,\frac{10^{-3}\ \text{kg}}{(10^{-2})^3\ \text{m}^3} = 1.3\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3},$$

que foi o número usado para obter v_u.

P 16-73 (15-??/6[a])

As janelas de um prédio de escritórios têm dimensões de 4m por 5 m. Em um dia tempestuoso, o ar passa pela janela do 53^o andar, paralelo à janela, com uma velocidade de 30 m/s. Calcule a força resultante aplicada na janela. A densidade do ar é 1.23 kg/m^3.

▶ Chamando-se de p_i a pressão interna da sala e de p_o a pressão de fora da janela, temos que a força líquida na janela é $(p_i - p_o)A$, onde A é a área da janela. A diferença de pressão pode ser encontrada usando-se a equação de Bernoulli: $p_0 + \rho v^2/2 = p_i$, onde v é a velocidade do ar fora e ρ é a densidade do ar. Supomos que o ar dentro da sala está parado. Portanto, $p_i - p_o = \rho v^2/2$ sendo a força é dada por

$$F = \frac{1}{2}\rho v^2 A = \frac{1}{2}(1.23)(30)^2(4)(3) = 1.11 \times 10^4\ \text{N}.$$

P 16-76 (15-??/6[a])

Uma placa de 80 cm^2 e 500 g de massa é presa por dobradiças em um de seus lados. Se houver ar soprando apenas sobre a sua superfície superior, que velocidade deverá ter o ar para sustentar a placa na posição horizontal?

▶ Este exercício considera uma situação análoga aquela mostrada na Fig. 16-26, da moça soprando sobre uma folha de papel.
Como a pressão é uniforme sobre superfície o torque que ela exerce pode ser calculado como se o ar atuasse no centro de massa, o mesmo valendo para a força da gravidade.
O torque líquido anula-se quando a força do ar iguala a força da gravidade. Seja p_ℓ a pressão na superfície de baixo, p_u a pressão na superfície de cima, v a velocidade do ar sobre a superfície superior, e ρ a densidade do ar. De acordo com a equação de Bernoulli,

$$p_\ell = p_u + \frac{1}{2}\rho v^2, \quad \text{ou seja} \quad p_\ell - p_u = \frac{1}{2}\rho v^2.$$

A magnitude da força do ar é $F = (p_\ell - p_u)A$, onde A é a área da placa. No equilíbrio, $F = mg$, onde m é a massa da placa. Portanto

$$\frac{1}{2}\,\rho v^2 A = mg,$$

de onde obtemos

$$v_1 = \sqrt{\frac{2mg}{\rho A}} = \sqrt{\frac{2(0.5)(9.8)}{(1.23)(80 \times 10^{-4})}} = 32\ \text{m/s}.$$

P 16-81 (15-25/6[a])

Aplicando a equação de Bernoulli e a equação da continuidade aos pontos 1 e 2 da Fig. 16-22, mostre que a velocidade do escoamento na entrada (ponto 1) é

$$v = \sqrt{\frac{2a^2\Delta p}{\rho(A^2 - a^2)}}.$$

▶ Ambos pontos estão na mesma altitude, de modo que a equação de Bernoulli é

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2.$$

A euqação da continuidade é $Av_1 = av_2$, de modo que $v_2 = Av_1/a$. Substituindo esta expressão na equação de Bernoulli obtemos

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho\left(\frac{A}{a}\right)^2 v_1^2.$$

Resolvendo-a, temos que

$$v_1 = \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)a^2}{\rho(A^2 - a^2)}} = \sqrt{\frac{2a^2\Delta p}{\rho(A^2 - a^2)}},$$

onde usamos $\Delta p \equiv p_1 - p_2$.