

2

MECÂNICA NEWTONIANA –
PARTÍCULA ÚNICA

2.1 INTRODUÇÃO

A ciência da mecânica busca fornecer uma descrição precisa e consistente da dinâmica de partículas e sistemas de partículas, isto é, um grupo de leis físicas descrevem matematicamente os movimentos dos corpos e agregados de corpos. Para isto, necessitamos de alguns conceitos fundamentais como distância e tempo que permitem definir a **velocidade** e **aceleração** da partícula. O terceiro conceito fundamental, **massa**, exige alguma elaboração, que forneceremos quando discutirmos as Leis de Newton.

As *Leis Físicas* devem ser baseadas num fato experimental. Não podemos esperar *a priori* que a atração gravitacional entre dois corpos deve variar exatamente com o inverso do quadrado da distância entre eles. Mas experimentos indicam que isso é assim. Uma vez que os dados de um grupo de experimentos tenham sido correlacionados e um postulado tenha sido formulado relativo ao fenômeno a que se referem os dados, então várias implicações podem ser obtidas. Se essas implicações forem todas verificadas experimentalmente, podemos acreditar que o postulado é geralmente verdadeiro. O postulado então assume o status de uma **lei física**. Se alguns experimentos discordam com as previsões da lei, a teoria deve ser modificada para ser consistente com os fatos.

Newton nos forneceu as leis fundamentais da mecânica. Declaramos aqui estas leis em termos modernos, discutindo seus significados, então derivando as implicações das leis em várias situações.* Mas a estrutura lógica da ciência da mecânica não é tão clara. Nossa linha de raciocínio na interpretação das leis de Newton não é a única possível.† Não discutiremos os detalhes filosóficos da mecânica mas somente forneceremos a elaboração das leis de Newton que nos permitem continuar com a discussão da dinâmica clássica. Dedicaremos nossa atenção neste capítulo para o movimento de uma única partícula, deixando sistemas de partículas para serem discutidos nos Capítulos 9 e 11–13.

*Truesdell (Tr68) mostra que Leonhard Euler (1707-1783) esclareceu e desenvolveu os conceitos Newtonianos. Euler “colocou muito da mecânica na sua forma moderna” e “tornou a mecânica simples e fácil” (p. 106).

†Ernest Mach (1838-1916) expressou seu ponto de vista em seu famoso livro publicado em 1883; E. Mach, *Die Mechanica in Ihrer Entwicklung historisch-Kritisch dargestellt*[A ciência da mecânica](Praga, 1883). Uma tradução da última edição é disponível (Ma60). Discussões interessantes também são proporcionadas por R. B. Lindsay e H. Margeneau (Li36) e N. Feather (Fe59).

2.2 LEIS DE NEWTON

Começamos simplesmente enunciando na forma convencional as Leis de Newton da mecânica*:

- I. *Um corpo permanece em repouso ou em movimento uniforme a menos que atue sobre ele uma força.*
- II. *Um corpo move-se sobre ação de uma força de tal maneira que a taxa de variação temporal do momento é igual a força.*
- III. *Se dois corpos exercem forças um sobre o outro, essas forças são iguais em magnitude e de direções opostas.*

Essas leis são deste modo familiares que algumas vezes tendemos a não perceber os verdadeiros significados (ou falta deles) como lei física. A Primeira Lei, por exemplo, é sem sentido sem o conceito de “força”, uma palavra usada por Newton em todas as três leis. De fato, sozinha, a Primeira Lei conduz a um significado preciso somente se a *força for nula*; isto é, o corpo permanece em repouso ou em movimento uniforme (isto é, não acelerado e retilíneo) sem estar sujeito a qualquer força que seja. O corpo movendo-se dessa maneira é denominado como **corpo livre** (ou **partícula livre**). A questão sobre o sistema de referência com respeito ao qual o “movimento uniforme” é medido será discutido na seção seguinte.

Destacando a falta deste conteúdo na Primeira Lei de Newton, Senhor Arthur Eddington[†] observou, de certa forma alegremente, o que realmente a lei diz é que “todas partículas continua em seu estado de repouso ou em movimento uniforme retilíneo exceto quando forçado externamente”. Isto é fortemente possível para Newton, quem pensou alguma coisa muito clara para seu enunciado. Mas isso enfatiza que a Primeira Lei a qual por si só provanos com a única noção qualitativa sobre “força”.

A segunda Lei fornece um enunciado explícito: a Força está relacionada com a taxa de variação temporal do *momento*. Newton apropriadamente definiu **momento** (entretanto ele usou o termo *quantidade de movimento*) como o produto da massa pela velocidade, tal que

$$\mathbf{p} \equiv m\mathbf{v} \quad (2.1)$$

Portanto, a Segunda Lei de Newton pode ser expressada como

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) \quad (2.2)$$

A definição de força torna-se completa e precisa somente quando “massa” é definida. Assim a Primeira e a Segunda Leis não são realmente “leis” no senso usual; mais precisamente, elas podem ser consideradas *definições*. Como o comprimento, tempo e a massa são conceitos já entendidos, nós usamos a Primeira e a Segunda Leis de Newton como a definição operacional de força. A terceira Lei de Newton, entretanto, é realmente uma *lei*. Ela é um enunciado a respeito do mundo real físico (natural) e contém toda a física nas leis de movimento de Newton.[‡]

Devemos adicionar, entretanto, que a Terceira Lei não é uma lei *geral* da natureza. A lei é aplicada quando exerce-se uma força em um objeto (pontual) sobre outro objeto (pontual) é

*Enunciada em 1687 por Sr. Isaac Newton (1642-1727) em *Philosophiae naturalis principia mathematica* [Princípios matemática de filosofia natural, normalmente chamada de *Principia*] (Londres, 1687). Anteriormente, Galileo (1564-1642) generalizou os resultados dos seus próprios experimentos matemáticos com suposições equivalentes a Primeira e Segunda Leis de Newton. Mas Galileo não forneceu uma descrição completa da dinâmica porque ele não conhecia o significado da terceira Lei de Newton - e portanto faltou determinar precisamente o significado de força

[†] Senhor Arthur Eddington (Ed30, p. 124).

[‡] O presente raciocínio aqui, a saber, a Primeira e Segunda Leis são realmente definições e a Terceira Lei contém a Física, esta não é a única interpretação possível. Lindsay and Margenau (Li36), por exemplo, apresentam que as duas primeiras Leis são Leis Físicas e ent.ÃO derivam a Terceira Lei como uma consequência.

direcionada ao longo de uma linha que une os objetos. Tais forças são chamadas **forças centrais**; a Terceira Lei é aplicada se a força central é atrativa ou repulsiva. As forças gravitacional e eletrostática são forças centrais, assim as Leis de Newton podem ser usadas em problemas envolvendo esses tipos de forças. As vezes forças elásticas (as quais são realmente manifestações macroscópicas de forças eletrostáticas microscópicas) são centrais. Por exemplo, dois objetos pontuais conectados diretamente por uma mola ou corda elástica são sujeitos a forças que obedecem a Terceira Lei. Alguma força que depende da velocidade de interação entre os corpos é não central, e a Terceira Lei não pode ser aplicada. Forças dependentes da velocidade são características de interações que se propagam com velocidades finitas. Assim a força entre cargas em *movimento* não obedece a Terceira Lei, porque a força se propaga com a velocidade da luz. Até mesmo a força gravitacional entre corpos em *movimento* é dependente da velocidade, mas o efeito é pequeno e de difícil detecção. O único efeito observado é a precessão do periélio dos planetas mais internos (visto na seção 8.9). Retornaremos a discussão da Terceira Lei de Newton no Capítulo 9.

Para demonstrar o significado da Terceira Lei de Newton, vamos parafraseá-lo da seguinte maneira, o qual incorpora a definição apropriada de massa:

III'. *Se dois corpos constituem um sistema ideal e isolado, então as acelerações destes corpos são sempre em direções opostas, e a razão da magnitude das acelerações é constante. Esta razão constante é o inverso da razão das massas dos corpos.*

Com esse procedimento, podemos dar a definição prática de massa e dessa forma fornecer um significado preciso para as equações que resumem a dinâmica Newtoniana. Para dois corpos isolados, 1 e 2, a Terceira Lei diz que

$$\mathbf{F}_1 = -\mathbf{F}_2 \quad (2.3)$$

Usando a definição de força como apresentado pela Segunda Lei, temos

$$\frac{d\mathbf{p}_1}{dt} = -\frac{d\mathbf{p}_2}{dt} \quad (2.4a)$$

ou, com massas constantes,

$$m_1 \left(\frac{d\mathbf{v}_1}{dt} \right) = m_2 \left(-\frac{d\mathbf{v}_2}{dt} \right) \quad (2.4b)$$

e, como a aceleração é derivada temporal da velocidade,

$$m_1(\mathbf{a}_1) = m_2(-\mathbf{a}_2) \quad (2.4c)$$

Portanto,

$$\frac{m_2}{m_1} = -\frac{a_1}{a_2} \quad (2.5)$$

onde o sinal negativo indica somente que os vetores aceleração estão em direções opostas. A massa é considerada uma grandeza positiva.

Sempre podemos selecionar, digamos, m_1 como *unidade de massa*. Então, comparando a relação das acelerações onde m_1 é permitido interagir com qualquer outro corpo, podemos determinar a massa do outro corpo. Para medir as acelerações, devemos ter relógios e réguas apropriadas; também, devemos escolher um sistema de coordenadas ou sistema de referência adequado. A questão de um “sistema de referências adequado” é discutido na próxima seção.

Um dos mais comuns métodos de determinação de massa de um objeto é pela pesagem – por exemplo pela comparação de seu peso a de um padrão por meio de uma balança de contra peso. Esse procedimento faz uso do fato que em um campo gravitacional o peso de um corpo é apenas a força gravitacional agindo no corpo; isto é, a equação de Newton $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ se torna $\mathbf{W} = m\mathbf{g}$, onde \mathbf{g} é aceleração devido a gravidade. A validade do uso desse procedimento apoia-se em uma hipótese fundamental: que a massa m que aparece na equação de Newton é definida de acordo com enunciado III é igual a massa m que aparece na equação da força gravitacional. Essas duas massas são chamadas de **massa inercial** e **massa gravitacional**, respectivamente. As definições podem ser enunciadas como segue:

Massa Inercial: é a massa que determina a aceleração de um corpo sob a ação de uma dada força.

Massa Gravitacional: é a massa que determina as forças gravitacionais entre um corpo e outros corpos.

Galileu foi o primeiro a testar a equivalência de massa inercial e massa gravitacional em seu (possivelmente falso) experimento com quedas de objetos na Torre de Pisa. Newton também considerou o problema e mediu os períodos de pêndulos de comprimento iguais mas com materiais diferentes. Nem Newton nem Galileu encontraram qualquer diferença mas os métodos foram tanto rudimentares.* Em 1890 Eötvös[†] inventou um método engenhoso para testar a equivalência das massas inerciais e gravitacionais. Usando dois objetos feitos com materiais diferentes, ele comparou o efeito da força gravitacional da Terra (isto é, o peso) com o efeito da força inercial causada pela rotação da terra. O experimento envolveu um método de efeito nulo usando uma balança de torção sensível e por essa razão foi altamente preciso. Experimentos mais recentes (notavelmente os de Dicke[‡]), usando essencialmente o mesmo método teve melhor precisão, e sabemos agora que a massa inercial e a massa gravitacional são idênticas dentro de algumas partes em 10^{12} . Esse resultado é consideravelmente importante na teoria geral da relatividade[§]. A afirmação da exata igualdade da massa gravitacional é expressa com **princípio de equivalência**.

A terceira lei de Newton é declarada em termos de dois corpos que consistem um sistema isolado. É impossível alcançar tal condição ideal; cada corpo no universo interage com todos os outros corpos, embora a força de interação possa ser muito fraca para ser de qualquer importância prática se grandes distâncias são envolvidas. Newton evitou a questão de como distinguir o efeito desejado de todos os outros efeitos estranhos. Mas esta prática dificilmente enfatizará sozinho a enormidade da afirmação de Newton na Terceira Lei. É um tributo à profundidade da percepção dele e a perspicácia física das conclusões baseando-se em observações limitadas, prosperamente sustentou o teste de experimento por 300 anos. Apenas neste século houve medidas com detalhes suficientemente relevantes contendo discrepâncias com as previsões da teoria de Newton. A perseguição desses detalhes conduziu ao desenvolvimento da teoria da relatividade e da mecânica quântica[¶]. Outra interpretação da Terceira Lei de Newton é baseada no conceito de momento arranjando a Equação 2.4a fornece

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2) = 0$$

ou

$$\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \text{constante} \quad (2.6)$$

A declaração que momento é conservado na interação isolada de duas partículas é um caso especial de uma declaração mais geral **conservação de momento linear**. Físicos apreciam leis de conservação gerais, e a conservação de momento linear acredita-se ser sempre obedecida, mais tarde modificaremos nossas definições de momento da Equação ?? para altas velocidades aproximando-se a velocidade da luz.

2.3 SISTEMAS DE REFERÊNCIAS

Newton percebeu que, para as leis de movimento terem significado, o movimento dos corpos devem ser medidos relativos ao mesmo sistema de referência. O sistema de referência é chamado de **referência inercial** se as leis de Newton são validas realmente neste sistema; que é, se um corpo não está

*No experimento de Newton, ele pode ter detectado uma diferença de somente uma parte em 10^3 .

[†]Roland Van Eötvös (1848- 1919) um conde Húngaro, sua pesquisa em problemas gravitacionais conduziram ao desenvolvimento de um gravitômetro, o qual foi usado em estudos geológicos.

[‡]P. G. Roll, R. Krotkov e R. H. Dicke, Ann. Phys. (n.Y.) **26**, 442 (1964) Ver também Braginsky e Pavov, Sov. Phys. - JETP **34**, 463 (1972).

[§]Ver, por exemplo, as discussões feitas por P. G. Bergmann (Be96) e J. Weber (We61). Livro de Weber também fornece uma análise do experimento de Eötvös.

[¶]Ver também a Seção 2.8.

sujeito a forças externas move-se em uma linha reta com velocidade constante (ou se mantém em repouso), então o sistema de coordenadas que estabelece este fato é um sistema de referência inercial. Esta é uma definição operacional clara e um que também segue da teoria da relatividade geral.

Se as leis de Newton são válidas em um sistema de referência, então elas também são válidas em qualquer sistema de referência em movimento uniforme (isto é, não acelerado) com respeito ao primeiro sistema.* Este é um resultado do fato que a equação $\mathbf{F} = m\ddot{\mathbf{r}}$ envolve uma derivada segunda de \mathbf{r} : Uma mudança de coordenadas envolvendo uma velocidade constante não influencia a equação. Este resultado é chamado de **invariância de Galileu ou princípio da relatividade Newtoniana**.

A teoria da relatividade tem mostrado que os conceitos de repouso *absolutos* e um sistema de referência descrito inercial *absoluto* não tem sentido. Então mesmo que adotemos um sistema de referência descrito com respeito às estrelas “fixas” – e realmente tais sistemas as equações Newtonianas são válidas com um alto grau de precisão – tal sistema não é na realidade um referencial inercial absoluto. Todavia podemos considerar as estrelas “fixas” para definir um sistema de referência que se aproxima de um referencial inercial “absoluta” para que até certos pontos satisfaçam ao nosso propósito.

Embora o sistema de referência das estrelas-fixas seja um sistema convencionalmente definível e conveniente para muitos propósitos, devemos enfatizar que as definições fundamentais de um referencial inercial não fazem menções as estrelas fixas ou vice-versa. Se um corpo não está sujeito a forças e movimenta-se com velocidade constante em um certo referencial, este sistema é, por definição um sistema de referência inercial. Como a descrição precisa de movimento de um objeto físico real no mundo físico real é normalmente difícil, usaremos idealizações e aproximações de graus variados; isto é: desprezaremos as forças mais fracas sobre o corpo se estas forças não afetam significativamente o corpo.

Se desejarmos descrever o movimento de, digamos, de uma partícula livre e se escolhermos para esse propósito algum sistema de coordenadas num referencial inercial, então requeremos que a equação (vetorial) do movimento da partícula seja independente da *posição* da origem do sistema coordenado e independente de sua *orientação* no **espaço**. Além disso iremos requerer que o **tempo** seja homogêneo; isto é, uma partícula livre movendo-se com velocidade constante no sistema coordenado durante um certo intervalo de tempo que não deve ser durante um intervalo de tempo posterior, seja encontrado movendo-se com velocidade diferente.

Podemos ilustrar a importância dessas propriedades pelo seguinte exemplo. Considere como na Figura 2-1, uma partícula livre movendo-se ao longo de uma trajetória AC. Para descrever o movimento da partícula, vamos escolher um sistema de coordenadas retangulares no qual a origem de move em um círculo, como mostrado. Para simplificar, vamos formar a orientação dos eixos fixo no espaço. A partícula move-se com uma velocidade relativa \mathbf{v}_p relativo a um referencial inercial. Se o sistema de coordenadas move-se com uma velocidade linear \mathbf{v}_c quando passa no ponto B, e se $\mathbf{v}_c = \mathbf{v}_p$, então para um observador no sistema de coordenadas móvel a partícula (em A) parece estar em repouso. Algum tempo depois, no entanto, quando a partícula está em C e o sistema de coordenadas em D, a partícula parecerá estar acelerada em relação ao observador. Devemos, portanto, concluir que o sistema de coordenadas em rotação não pode ser considerado um referencial inercial.

Estas observações não são suficientes para decidir se o tempo é homogêneo. Para alcançar semelhantes conclusões, repetidas medidas devem ser feitas em situações idênticas em diversos instantes de tempo; idênticos resultados indicarão a homogeneidade do tempo.

As equações de Newton não descrevem o movimento dos corpos em sistemas de referência não-inercial. Podemos desenvolver um método para descrever o movimento de uma partícula para um sistema de coordenadas em rotação, mas, como será visto no Capítulo 10, as equações resultantes

*No Capítulo 10, discutiremos as modificações que devem ser feitas nas equações de Newton se desejamos descrever o movimento de um corpo em relação a um sistema de referência não inercial, isto é, um referencial que está acelerado em relação a um referencial inercial.

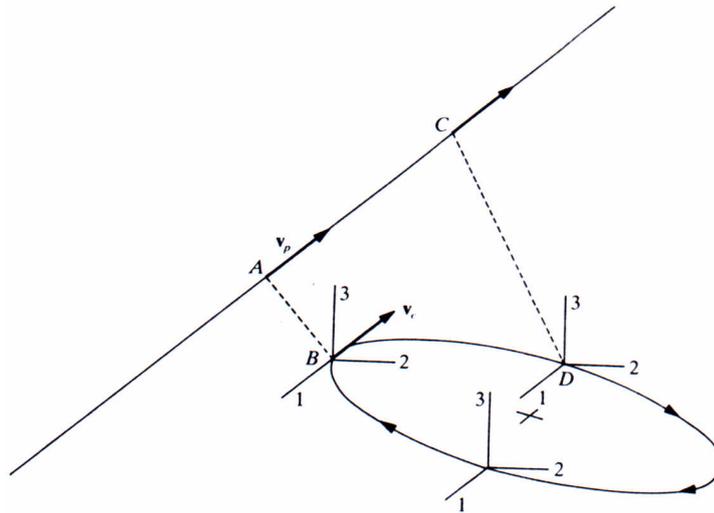


FIGURA 2-1

contêm vários termos que não aparecem na simples equação Newtoniana $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$. Para o momento, então, restringimos nossa atenção para os sistemas de referência inercial para descrever a dinâmica de partículas.

2.4 A EQUAÇÃO DO MOVIMENTO PARA UMA PARTÍCULA

A equação newtoniana $\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$ podem expressar alternativamente como

$$\mathbf{F} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = m\ddot{\mathbf{r}} \quad (2.7)$$

se adotarmos que a massa m não varia com o tempo. Esta é uma equação diferencial de segunda ordem que pode ser integrada para encontrar $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ se a função \mathbf{F} é conhecida.

Especificando os valores iniciais de \mathbf{r} e $\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}$ obtemos as duas constantes arbitrárias da integração. Então determinamos o movimento da partícula pela função da força \mathbf{F} e os valores iniciais para a posição \mathbf{r} e a velocidade \mathbf{v} .

A força \mathbf{F} pode ser uma função de alguma combinação da posição, velocidade e tempo, e é geralmente denotada como $\mathbf{F}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$. Para um certo sistema dinâmico, normalmente queremos saber \mathbf{r} e \mathbf{v} como uma função do tempo. Isto é obtido resolvendo a Equação 2.7 em $\ddot{\mathbf{r}}$. A aplicação da Equação 2.7 para situações físicas é uma importante parte da mecânica.

Neste capítulo, estudaremos vários exemplos no qual a função força é conhecida. Iniciaremos usando funções força mais simples (constante ou dependente somente de \mathbf{r} , ou \mathbf{v} ou t) em uma dimensão espacial somente, como uma revisão das disciplinas básicas de física. Isso é importante para formar bons hábitos na resolução de problemas. Abaixo são apresentadas algumas técnicas úteis para resolver problemas.

1. Fazer um esboço (esquema gráfico – desenho) do problema, indicando as forças, velocidade e assim por diante.
2. Escreva as grandezas e seus valores fornecidos.
3. Escreva as equações que serão utilizadas e o que é para ser determinado.

4. As equações que descrevem o problema normalmente devem ser manipuladas a fim de achar a grandeza procurada. Manipulações algébricas bem como a diferenciação ou integração são usualmente exigidas. Algumas vezes cálculos numéricos usando o computador são mais fáceis, se for o único método para a solução.
5. Finalmente, coloque os valores reais fornecidos, para obter os valores das variáveis das grandezas procuradas.

Vamos considerar o problema do bloco deslizando no plano inclinado. O ângulo do plano inclinado é θ e a massa do bloco será 100 g. O esquema do problema é mostrado na Figura 2-2a.

EXEMPLO 2.1 -----

Se um bloco desliza sem atrito sob um plano inclinado fixo, $\theta = 30^\circ$, qual é a aceleração deste?

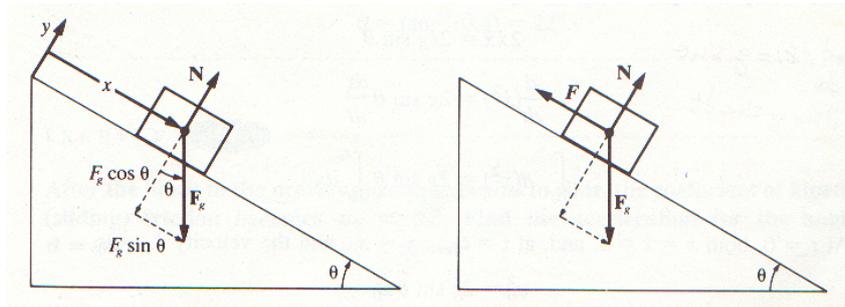


FIGURA 2-2

Solução: Duas forças atuam no bloco (ver Figura 2-2a): a força gravitacional \mathbf{F}_g e a força normal do plano \mathbf{N} empurrando para cima no bloco (sem atrito neste exemplo). O bloco é pressionado para ficar sobre o plano, e a única direção que ele pode se mover é na direção x , subindo e descendo o plano. Nós tomamos a direção $+x$ para descer o plano. A força resultante \mathbf{F} é constante; a Equação 2.7 se torna

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_g + \mathbf{N}$$

e porque \mathbf{F} é a força resultante do sistema que atua no bloco,

$$\mathbf{F} = m\ddot{\mathbf{r}}$$

ou

$$\mathbf{F}_g + \mathbf{N} = m\ddot{\mathbf{r}} \tag{2.8}$$

Este vetor deve ser aplicado em duas direções: x e y (perpendicular a x). A componente da força na direção y é zero, porque não ocorre aceleração nesta direção. A força \mathbf{F}_g está dividida vetorialmente dentro de suas componentes x e y (linhas na Figura ??a). A Equação 2.8 se torna

$$-F_g \cos \theta + N = 0 \tag{2.9}$$

direção x

$$F_g \sin \theta = m\ddot{x} \tag{2.10}$$

com o resultado adquirido

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= \frac{F_g}{m} \sin \theta = \frac{mg \sin \theta}{m} = g \sin \theta \\ \ddot{x} &= g \sin (30^\circ) = \frac{g}{2} = 4.9m/s^2\end{aligned}\quad (2.11)$$

Portanto, a aceleração do bloco é constante.

Podemos encontrar a velocidade do bloco após este se mover do repouso uma distância x_0 descendo o plano pela multiplicação da Equação 2.11 por $2\dot{x}$ e integrando

$$\begin{aligned}2\dot{x}\ddot{x} &= 2\dot{x}g \sin \theta \\ \frac{d}{dt}(\dot{x}^2) &= 2g \sin \theta \frac{dx}{dt} \\ \int_0^{v_0^2} d(\dot{x}^2) &= 2g \sin \theta \int_0^{x_0} dx\end{aligned}$$

Para $t = 0$, ambos $x = \dot{x} = 0$, e, para $t = t_{final}$, $x = x_0$, e a velocidade $\dot{x} = v_0$.

$$\begin{aligned}v_0^2 &= 2g \sin \theta x_0 \\ v_0 &= \sqrt{2g \sin \theta x_0}\end{aligned}$$

EXEMPLO 2.2

Se o coeficiente de atrito estático entre o bloco e o plano previsto do exemplo anterior é $\mu_s = 0.4$, em que ângulo θ o bloco começará a deslizar se estiver inicialmente em repouso?

Solução: Necessitamos de uma força de atrito adicional f (veja Figura 2.2b). A força de atrito estática tem o valor máximo aproximado

$$f_{max} = \mu_s N \quad (2.12)$$

e a Equação 2.7 torna-se, na forma de suas componentes,

direção y

$$-F_g \cos \theta + N = 0 \quad (2.13)$$

direção x

$$-f_s + F_g \sin \theta = m\ddot{x} \quad (2.14)$$

A força de atrito estática f_s terá algum valor entre $f_s \leq f_{max}$ para manter $\ddot{x} = 0$ – para manter o bloco em repouso. Entretanto, o ângulo θ do plano aumenta, logo a força de atrito estática será incapaz de manter o bloco no repouso. Nesse ângulo θ' , f_s torna-se

$$f_s(\theta = \theta') = f_{max} = \mu_s N = \mu_s F_g \cos \theta$$

e

$$\begin{aligned}m\ddot{x} &= F_g \sin \theta - f_{max} \\ m\ddot{x} &= F_g \sin \theta - \mu_s F_g \cos \theta \\ \ddot{x} &= g(\sin \theta - \mu_s \cos \theta)\end{aligned}\quad (2.15)$$

Imediatamente antes do bloco começar deslizar, a aceleração é $\ddot{x} = 0$, assim

$$\begin{aligned}\sin \theta - \mu_s \cos \theta &= 0 \\ \tan \theta &= \mu_s = 0.4 \\ \theta &= \tan^{-1}(0.4) = 22^\circ\end{aligned}$$

EXEMPLO 2.3

Depois que o bloco do exemplo anterior começa a deslizar, o coeficiente da fricção cinética (do movimento) torna-se $\mu_k = 0.3$. Encontre a aceleração para o ângulo de $\theta = 30^\circ$.

Solução: Similarmente ao Exemplo 2.2, a fricção cinética torna-se (aproximadamente)

$$f_k = \mu_k N = \mu_k F_g \cos \theta \quad (2.16)$$

e

$$m\ddot{x} = F_g \sin \theta - f_k = mg(\sin \theta - \mu_k \cos \theta) \quad (2.17)$$

$$\ddot{x} = g(\sin \theta - \mu_k \cos \theta) = 0.24g \quad (2.18)$$

Geralmente, a força de fricção estática ($f_{max} = \mu_s N$) é maior que aquela da fricção cinética ($f_k = \mu_k N$). Isto pode ser observado em uma experiência simples. Se diminuirmos o ângulo θ abaixo de 16.7° , encontramos que $\ddot{x} < 0$, e o bloco permanece parado. Se levantarmos o apoio do bloco acima de $\theta = 16.7^\circ$, encontramos que o bloco não inicia o movimento novamente até que $\theta \geq 22^\circ$. A fricção estática determina quando o movimento tem início novamente. Não há uma aceleração descontínua enquanto o bloco começa se mover devido a diferença entre μ_s e μ_k . Para velocidades pequenas, o coeficiente de fricção muda rapidamente de μ_s a μ_k .

O assunto da fricção é ainda uma área de pesquisa interessante e importante. Há sempre algumas surpresas. Por exemplo, mesmo que calculássemos o valor absoluto da força de fricção como $f = \mu N$, a pesquisa mostrou que a força de fricção é diretamente proporcional, não à carga, mas à área de contato microscópica entre os dois objetos (ao contrário da área de contato aparente). Nós usamos o μN como uma aproximação porque, enquanto N aumenta, "faz assim a área de contato real em um nível microscópico". Por centenas de anos antes dos 1940s, aceitou-se que a carga – e não a área – eram responsáveis diretamente. Acreditamos também que a força de fricção estática é maior que aquela de fricção cinética porque a ligação dos átomos entre os dois objetos não tem como se desenvolver por muito tempo no movimento cinético.

EFEITO DAS FORÇAS DE RETARDAMENTO

Devemos enfatizar que a força \mathbf{F} na Equação 2.7 não é necessariamente constante, e de fato, ela pode consistir de várias partes distintas, como vimos nos exemplos anteriores. Por exemplo, se uma partícula cai num campo gravitacional constante, a força gravitacional é $\mathbf{F}_g = m\mathbf{g}$, onde \mathbf{g} é a aceleração da gravidade. Se conjuntamente, existe uma força de retardamento \mathbf{F}_r e que é uma função da velocidade instantânea, então a força total é

$$\begin{aligned}\mathbf{F} &= \mathbf{F}_g + \mathbf{F}_r \\ &= m\mathbf{g} + \mathbf{F}_r(v)\end{aligned} \quad (2.19)$$

Geralmente é suficiente considerar que $\mathbf{F}_r(v)$ é simplesmente proporcional a alguma potência da velocidade. Em geral, as forças de retardamento reais são mais complicadas, mas a aproximação pela lei das potências é útil em muitas ocasiões na qual a velocidade não tem grandes variações. Neste caso, se $\mathbf{F}_r \propto v^n$, então a equação de movimento pode geralmente ser integrada diretamente ao passo que, se a real dependência da velocidade for usada, provavelmente será necessário uma integração numérica. Com a aproximação da lei da potência, podemos escrever

$$\mathbf{F} = m\mathbf{g} - mkv^n \frac{\mathbf{v}}{v} \quad (2.20)$$

onde k é uma constante positiva que especifica o poder da força de retardamento e \mathbf{v}/v é um vetor unitário na direção de \mathbf{v} . Experimentalmente, encontramos que, para um objeto relativamente pequeno movendo-se no ar, $n \cong 1$ para velocidades menores que aproximadamente 24 m/s (~ 80 ft/s). Para altas velocidades mas com valores abaixo da velocidade do som (~ 330 m/s ou 1.100 ft/s), a força de retardamento é aproximadamente proporcional ao quadrado da velocidade.* Para simplificar, a dependência de v^2 quase sempre é usada para velocidades acima da velocidade do som.

O efeito da resistência do ar é importante, por exemplo, para um jogo de ping-pong, uma bola leve movendo-se velozmente desvia sua trajetória e, para um projétil de morteiro lançado contra um inimigo. Extensas tabelas foram construídas para projéteis balísticos militares de diferentes tipos com a velocidade em função do tempo de vôo. Existem várias forças atuando sobre um projétil em vôo. A resistência do ar é chamada de força de arraste \mathbf{W} e é oposta a velocidade do projétil, como mostra a Figura 2-3a. A velocidade \mathbf{v} não é normalmente paralela ao eixo de simetria do projétil. O componente da força atuando perpendicularmente a força de arraste é conhecida, como força de ascensão \mathbf{L}_a . Deve haver também outras forças devido a rotação e oscilação do projétil, e um cálculo da trajetória balística do projeto é extremamente complexo. A expressão de Prandtl para resistência do ar[†] é

$$W = \frac{1}{2} c_W \rho A v^2 \quad (2.21)$$

onde c_W é o coeficiente de arraste adimensional, ρ é a densidade do ar, v é a velocidade e A é a área da seção reta do objeto (projétil) medida perpendicularmente com a velocidade. Nas Figuras 2-3b, plotamos alguns valores típicos para c_W , e nas Figuras 2-3c e d podemos calcular a resistência W usada na Equação 2.21 para um projétil de diâmetro 10 cm e usando os valores de c_W apresentados. A resistência do ar aumenta drasticamente próximo à velocidade do som (número de Mach $M = \text{velocidade}/\text{velocidade do som}$). Abaixo das velocidades de aproximadamente 400 m/s é evidente que uma equação de pelo menos segundo grau é necessária para descrever a força de resistência. Para altas velocidades, o retardamento da força varia aproximadamente linearmente com a velocidade.

Vários exemplos de movimento de uma partícula sujeita a várias forças são descritas a seguir. Esses exemplos são particularmente bons para a iniciação a cálculos computacionais usando alguns dos programas comerciais de matemática simbólica, de planilhas ou para os estudantes escreverem seus próprios programas. Os resultados computacionais, especialmente os gráficos podem muitas vezes ser comparados com os resultados analíticos apresentamos aqui. Algumas das Figuras mostradas nesta seção foram produzidas usando cálculos computacionais, e vários problemas propostos no final do capítulo são propostos para os estudantes iniciarem experiências no uso do computador, se assim desejar o professor ou estudante.

*O movimento de uma partícula num meio na qual há uma força resistente proporcional a velocidade ou com o quadrado da velocidade (ou uma combinação linear das duas) foi estudado por Newton em seu *Principia* (1687). A extensão para alguma potência da velocidade foi feito por Joham Bernoulli em 1711. O termo *lei da resistência de Stokes* é algumas vezes aplicada para uma força resistente proporcional a velocidade; a lei da resistência de Newton é uma força de retardamento proporcional ao quadrado da velocidade.

[†]Veja o artigo de E. Melchior e H. Reuschel no “*Handbook on Weaponry*” (Rh82, p.137)

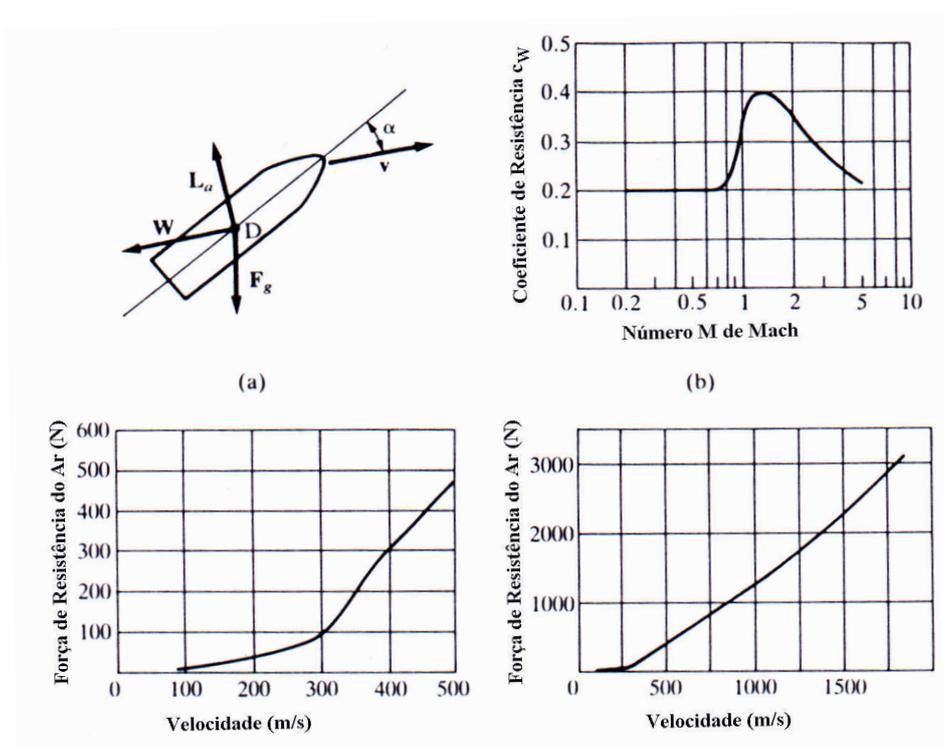


FIGURA 2-3 (a) Forças aerodinâmicas agindo no projétil. \mathbf{W} é a força de arraste (força da resistência do ar) e é oposta a velocidade do projétil \mathbf{v} . Observe que \mathbf{v} deverá estar num ângulo α com o eixo da simetria do projétil. O componente da força de ação perpendicular a força de arraste é chamada de força de ascensão \mathbf{F}_a . O ponto D é o centro de pressão. Finalmente, a força gravitacional \mathbf{F}_g age para baixo. Se o centro de pressão não está no centro de massa do projétil, há também um torque em torno do centro de massa. (b) O coeficiente de arraste c_w , da lei de resistência de Rheinmetall (Rh82), é plotado como função do número M de Mach. Observe a grande variação próxima da velocidade do som onde $M = 1$. (c) A força de resistência do ar W (força de arraste) é mostrada com uma função da velocidade para um projétil de diâmetro igual a 10 cm. Observe a inflexão próxima da velocidade do som. (d) Mesma análise de (c) para altas velocidades.

EXEMPLO 2.4

Como um exemplo simples de movimento resistivo de uma partícula, encontramos o movimento e a velocidade do movimento horizontal em um meio em que a força de retardamento é proporcional a velocidade

Solução: Um esboço do problema é mostrado na Figura 2-4. A Equação Newtoniana $F = ma$ fornece-nos equação de movimento: *direção x*

$$ma = m \frac{dv}{dt} = -kmv \quad (2.22)$$

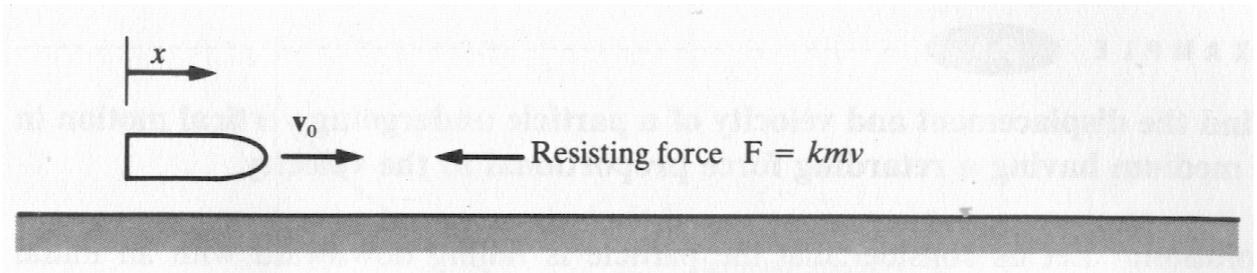


FIGURA 2-4

onde kmv é a magnitude da força de resistência ($k = \text{constante}$). Portanto

$$\int \frac{dv}{v} = -k \int dt$$

$$\ln v = -kt + C_1 \quad (2.23)$$

A integração constante na Equação 2.23 pode ser avaliada se prescrevermos a condição inicial $v(t = 0) \equiv v_0$. Logo $C_1 = \ln v_0$, e

$$v = v_0 e^{-kt} \quad (2.24)$$

Podemos integrar esta equação para obter o deslocamento x como função do tempo:

$$v = \frac{dx}{dt} = v_0 e^{-kt}$$

$$x = v_0 \int e^{-kt} dt = -\frac{v_0}{k} e^{-kt} + C_2 \quad (2.25a)$$

A condição inicial $x(t = 0) \equiv 0$ implica $C_2 = v_0/k$. Então

$$x = \frac{v_0}{k} (1 - e^{-kt}) \quad (2.25b)$$

Este resultado mostra que x aproxima-se do valor v_0/k conforme $t \rightarrow \infty$.

Podemos também obter a velocidade como função do deslocamento escrevendo

$$\frac{dv}{dx} = \frac{dv}{dt} \frac{dt}{dx} = \frac{dv}{dt} \frac{1}{v}$$

portanto

$$v \frac{dv}{dx} = \frac{dv}{dt} = -kv$$

ou

$$\frac{dv}{dx} = -k$$

para a qual encontramos, usando as mesmas condições iniciais,

$$v = v_0 - kx \quad (2.26)$$

Portanto, a velocidade decresce linearmente com o deslocamento.

EXEMPLO 2.5

Encontre o deslocamento e a velocidade de uma partícula que se encontra em movimento vertical em um meio que tem uma força de retardamento proporcional à velocidade.

Solução: Considere uma partícula caindo com velocidade inicial v_0 de uma altura h e campo gravitacional constante (Figura 2.5). A equação de movimento é
direção z

$$F = m \frac{dv}{dt} = -mg - kmv \quad (2.27)$$

onde $-kmv$ representa a força positiva *para cima* desde z onde $v = \dot{z}$ no sentido positivo para cima, assim como o movimento para baixo - isto é, $v < 0$, assim $-kmv > 0$. A partir da Equação 2.27, temos

$$\frac{dv}{kv + g} = -dt \quad (2.28)$$

Integrando a Equação 2.28 e considerando $v(t=0) \equiv v_0$, temos (notando que $v_0 < 0$)

$$\begin{aligned} \frac{1}{k} \ln(kv_0 + g) &= -t + c \\ kv + g &= e^{-kt+kc} \\ v &= \frac{dz}{dt} = -\frac{g}{k} + \frac{kv_0 + g}{k} e^{-kt} \end{aligned} \quad (2.29)$$

Integrando mais uma vez e calculando a constante no sentido $z(t=0) \equiv h$, temos

$$z = h - \frac{gt}{k} + \frac{kv_0 + g}{k^2} (1 - e^{-kt}) \quad (2.30)$$

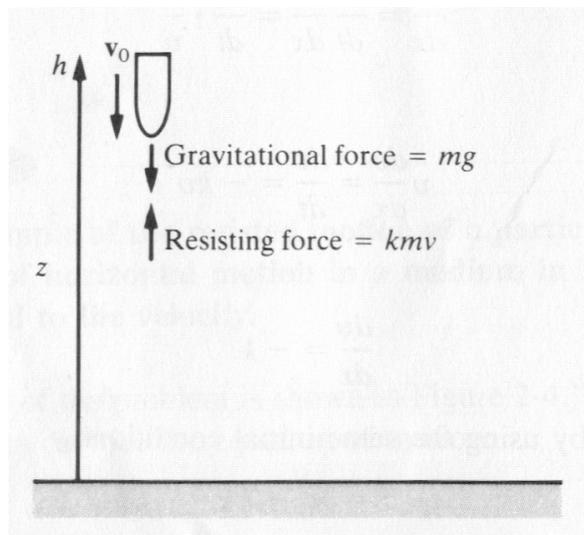


FIGURA 2-5

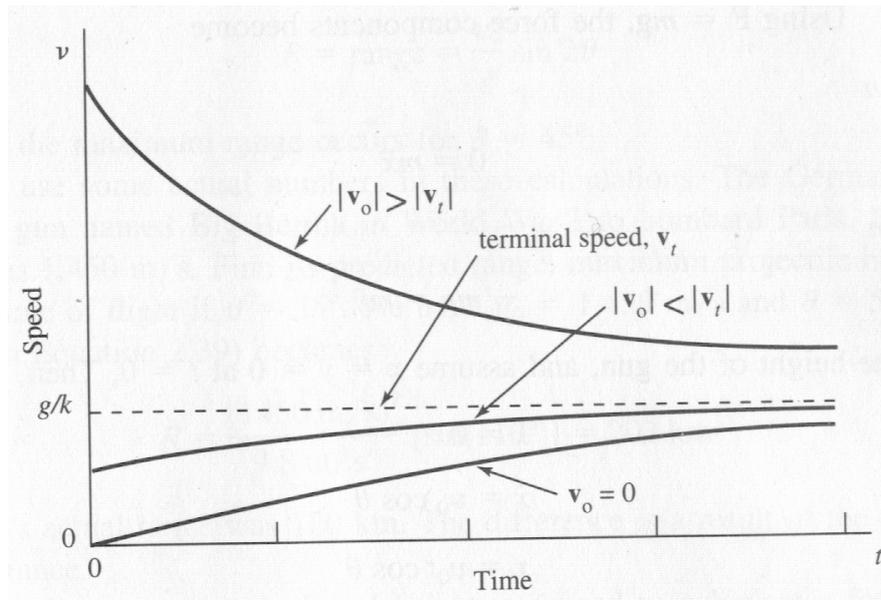


FIGURA 2-6

A Equação 2.29 mostra que enquanto o tempo se torna muito longo, a velocidade se aproxima do valor limite $-g/k$; esta é chamada **velocidade terminal**, v_t . A Equação 2.27 resulta no mesmo resultado, porque a força desaparecerá – e daqui nenhum acceleration mais adicional ocorrerá – quando $v = -g/k$. Se a velocidade inicial exceder a velocidade terminal em magnitude, então o corpo começa imediatamente a retardar para baixo e v aproxima-se da velocidade terminal na direção oposta. A Figura 2-6 ilustra estes resultados para velocidades descendentes (valores positivos).

EXEMPLO 2.6

Em seguida, tratamos o movimento do projétil em duas dimensões, primeiramente sem considerar a resistência do ar. Deixe a velocidade do açaimo do projétil ser v_0 e o ângulo de elevação ser θ (Figura 2-7). Calcule o deslocamento, a velocidade, e o alcance do projétil.

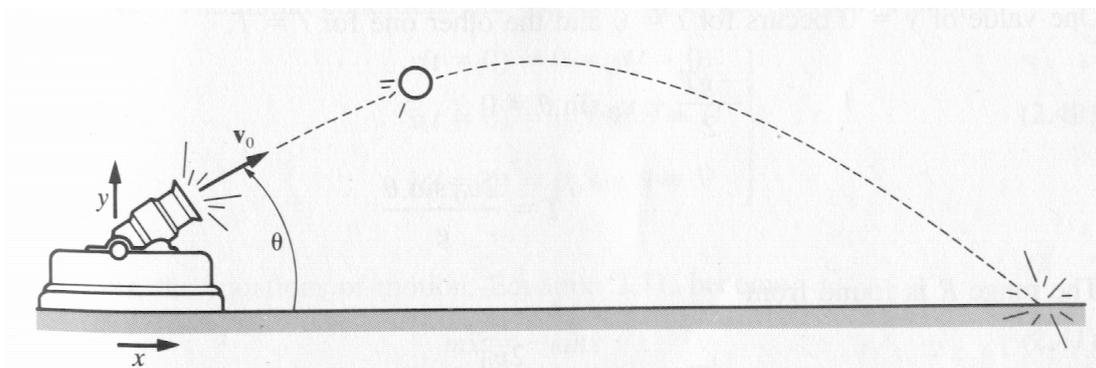


FIGURA 2-7

Solução: Usando $\mathbf{F} = m\mathbf{g}$, as componentes da força tornam-se
direção x

$$0 = m\ddot{x} \quad (2.31a)$$

direção y

$$-mg = m\ddot{y} \quad (2.31b)$$

Desconsiderando a altura da arma, e assumindo $x = y = 0$ e $t = 0$. Então

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= 0 \\ \dot{x} &= v_0 \cos \theta \\ x &= v_0 t \cos \theta \end{aligned} \quad (2.32)$$

e

$$\begin{aligned} \ddot{y} &= -g \\ \dot{y} &= -gt + v_0 \sin \theta \\ y &= \frac{-gt^2}{2} + v_0 t \sin \theta \end{aligned} \quad (2.33)$$

A velocidade e o deslocamento total como funções do tempo são encontrados por:

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = (v_0^2 + g^2 t^2 - 2v_0 g t \sin \theta)^{1/2} \quad (2.34)$$

e

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \left(v_0^2 t^2 + \frac{g^2 t^4}{4} - v_0 g t^3 \sin \theta \right)^{1/2} \quad (2.35)$$

Podemos encontrar o alcance determinando o valor de x quando o projétil atinge o solo, isto é, quando $y = 0$

$$y = t \left(\frac{-gt}{2} + v_0 \sin \theta \right) = 0 \quad (2.36)$$

Um valor de $y = 0$ ocorre para $t = 0$ e o outro para $t = T$.

$$\begin{aligned} \frac{-gT}{2} + v_0 \sin \theta &= 0 \\ T &= \frac{2v_0 \sin \theta}{g} \end{aligned} \quad (2.37)$$

O alcance R é encontrado a partir de

$$x(t = T) = \text{alcance} = \frac{2v_0^2}{g} \sin \theta \cos \theta \quad (2.38)$$

$$R = \text{alcance} = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\theta \quad (2.39)$$

Observe que o alcance máximo ocorre para $\theta = 45^\circ$.

Vamos usar algum número atual nestes cálculos. Os alemães usaram uma arma de longo alcance nomeada Grande Cabina na Primeira Guerra Mundial que bombardeou Paris. O míssil chegou a uma velocidade de $1,450m/s$. Encontre o alcance previsto, a altura máxima do projétil, e o tempo de vôo do projétil se $\theta = 55^\circ$. Temos $v_0 = 1,450m/s$ e $\theta = 55^\circ$, assim (da Equação 2.39) o alcance torna-se

$$R = \frac{(1450m/s)^2}{9.8m/s^2} [\sin(110^\circ)] = 202km$$

a Grande Cabina atual alcança 120km . A diferença é um resultado do efeito real da resistência do ar.

Para encontrar a altura máxima atingida, precisamos calcular y para o tempo $T/2$ onde T é o tempo de vôo do projétil:

$$\begin{aligned} T &= \frac{(2)(1450m/s)(\sin 55^\circ)}{9.8m/s^2} = 242s \\ y_{max}\left(t = \frac{T}{2}\right) &= \frac{-gT^2}{8} + \frac{v_0T}{2} \sin \theta \\ &= \frac{-(9.8m/s)(242s)^2}{8} + \frac{(1450m/s)(242s) \sin(55^\circ)}{2} \\ &= 72km \end{aligned}$$

EXEMPLO 2.7

A seguir, adicionamos os efeitos da resistência do ar no movimento do projétil do exemplo anterior. Calcule o decrescimento do alcance deste supondo que a força causada pela resistência do ar seja diretamente proporcional à velocidade do projétil.

Solução: As condições iniciais são as mesmas do exemplo anterior.

$$\left. \begin{aligned} x(t=0) &= 0 = y(t=0) \\ \dot{x}(t=0) &= v_0 \cos \theta \equiv U \\ \dot{y}(t=0) &= v_0 \sin \theta \equiv V \end{aligned} \right\} \quad (2.40)$$

Entretanto, as equações do movimento, Equação 2.31, torna-se

$$m\ddot{x} = -k m \dot{x} \quad (2.41)$$

$$m\ddot{y} = -k m \dot{y} - mg \quad (2.42)$$

A Equação 2.41 é exatamente a mesma usada no Exemplo 2.4. A solução é, portanto

$$x = \frac{U}{k}(1 - e^{-kt}) \quad (2.43)$$

Similarmente, a Equação 2.42 é a mesma em relação à equação do movimento no Exemplo 2.5.

Podemos usar a solução encontrada neste exemplo com a condição de $h = 0$ (o fato que consideramos a partícula a ser projetada em declive no Exemplo 2.5 é de que não há consequência. O sinal da velocidade inicial automaticamente leva isto ao cálculo.) Portanto

$$y = -\frac{gt}{k} + \frac{kV + g}{k^2}(1 - e^{-kt}) \quad (2.44)$$

A trajetória é mostrada na Figura 2-8 por vários valores do retardamento da força constante k que é dado pelo vôo do projétil.

O alcance R' , o qual é o alcance incluindo a resistência do ar, pode ser encontrado previamente pelo cálculo do tempo T requerido pela trajetória inteira e então, substituindo este valor na Equação 2.43 por x . Este tempo T é encontrado previamente pela descoberta que $t = T$ quando $y = 0$. Da Equação 2.44, encontramos

$$T = \frac{kV + g}{gk}(1 - e^{-kT}) \quad (2.45)$$

Esta é uma equação transcendental, e, portanto, não podemos obter uma expressão analítica para T . Apesar de tudo nós ainda temos métodos poderosos para usar para solucionar tais problemas.

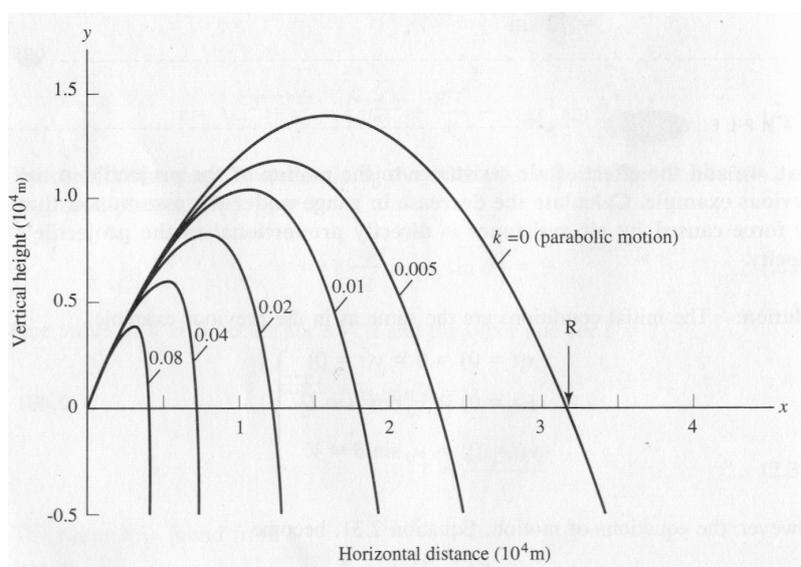


FIGURA 2-8 As trajetórias calculadas, da partícula na resistência do ar ($F_{res} = -kmv$) para vários valores de k (nas unidades s^{-1}). Os cálculos foram apresentados para valores de $\theta = 60^\circ$ e $v_0 = 600m/s$. Os valores de y (Equação 2.44) são marcados versus x (Equação 2.43).

Apresentamos dois deles aqui: (1) o método de perturbação para encontrar uma solução aproximada, e (2) o método numérico, o qual, pode normalmente ser constatado como o desejado. Compararemos os resultados.

Método de Perturbação. Para usar o método de perturbação, encontramos um *parâmetro de expansão* ou *uma função constante* que é normalmente pequeno. No presente caso, este parâmetro é o retardamento da constante k , porque já tínhamos solucionado o presente problema com $k = 0$, e agora poderíamos manter o retardamento da força, mas deixar o k ser pequeno. Entretanto, se expandirmos o termo exponencial da Equação 2.45 (veja Equação D.34 do Apêndice D) na série de forças com intenção de manter somente os termos mais baixos de k^n , onde k é o nosso parâmetro de expansão.

$$T = \frac{kV + g}{gk} \left(kT - \frac{1}{2}k^2T^2 + \frac{1}{6}k^3T^3 - \dots \right) \quad (2.46)$$

Se mantivermos somente termos na expansão através do k^3 , esta equação pode ser reestruturada na forma

$$T = \frac{2V/g}{1 + kV/g} + \frac{1}{3}kT^2 \quad (2.47)$$

Agora, temos o parâmetro de expansão k no denominador do primeiro termo no lado direito da equação. Precisamos expandir esse termo em uma série de forças (Séries de Taylor, ver Equação D.8 do Apêndice D):

$$\frac{1}{1 + kV/g} = 1 - (kV/g) + (kV/g)^2 - \dots \quad (2.48)$$

Onde podemos manter somente termos através de k^2 , pois somente temos termos através de k na Equação 2.47. Se inserirmos esta expansão da Equação 2.48 no primeiro termo do lado direito da Equação 2.47 e mantermos somente os termos em k para primeira ordem, temos

$$T = \frac{2V}{g} + \left(\frac{T^2}{3} - \frac{2V^2}{g^2} \right) k + O(k^2) \quad (2.49)$$

No qual escolhemos excluir o $O(k^2)$, os termos da ordem k^2 e mais altos. No limite $k \rightarrow 0$ (sem resistência do ar), a Equação 2.49 nos mostra o mesmo resultado que no exemplo anterior:

$$T(k=0) = T_0 = \frac{2V}{g} = \frac{2v_0 \sin \theta}{g}$$

Entretanto, se k é pequeno (mas não foi totalmente excluído) o tempo do voo será *aproximadamente* igual a T_0 . Então se usarmos este valor aproximado para $T = T_0$ no lado direito da Equação 2.49 teremos

$$T \cong \frac{2V}{g} \left(1 - \frac{kV}{3g} \right) \quad (2.50)$$

a qual é desejada uma expressão aproximada para o tempo de voo.

A seguir escrevemos a equação para x (Equação 2.43) na forma expandida:

$$x = \frac{U}{k} \left(kt - \frac{1}{2}k^2t^2 + \frac{1}{6}k^3t^3 - \dots \right) \quad (2.51)$$

Já que $x(t=T) \equiv R'$, temos aproximadamente para o alcance

$$R' \cong U \left(T - \frac{1}{2}kT^2 \right) \quad (2.52)$$

onde, novamente, mantemos os termos somente através da primeira ordem do k . Agora podemos avaliar esta expressão pelo uso do valor de T da Equação 2.50. Se mantermos somente os termos lineares no k , encontramos

$$R' \cong \frac{2Uv}{g} \left(1 - \frac{4kV}{3g} \right) \quad (2.53)$$

A quantidade $2UV/g$ agora pode ser escrita (usando as Equações 2.40) como

$$\frac{2Uv}{g} = \frac{2v_0^2}{g} \sin \theta \cos \theta = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\theta = R \quad (2.54)$$

As quais podem ser reconhecidas em relação ao alcance R do projétil quando a resistência do ar é desprezada. Então

$$R' \cong R \left(1 - \frac{4kV}{3g} \right) \quad (2.55)$$

Além dessa série de valores de k podemos esperar que nosso método de perturbação esteja correto? Se olharmos a expansão na Equação 2.48, vemos que a expansão não irá convergir a não ser que $kV/g < 1$ ou $k < g/V$, e na verdade gostaríamos que $k \ll g/V = g/(v_0 \sin \theta)$.

Método Numérico. A Equação 2.45 pode ser resolvida numericamente usando um computador por uma variedade de métodos, estabelecemos a volta para solucionar a equação para T por muitos valores de k até $0,08s^{-1}$: $T_i(k_i)$. Estes valores de T e k estão inseridos na Equação 2.43 para encontrar o alcance R' , o qual é mostrado na Figura 2-9. O alcance decai rapidamente com o aumento da resistência do ar, exatamente como esperamos, mas não é mostrada a dependência linear sugerida pela solução do método de perturbação da Equação 2.55.

Para o movimento do projétil descrito nas Figuras 2-8 e 2-9, a aproximação linear não está constatada para os valores de k tão baixos quanto $0.01s^{-1}$ e incorretamente mostra que o alcance é zero para todos valores de k maiores do que $0.014s^{-1}$. Esta desconcordância com o método de perturbação não é uma surpresa, pois o resultado linear para o alcance R' era dependente em $k \ll g/(v_0 \sin \theta) = 0.02s^{-1}$, o qual é dificilmente verdade até para o $k = 0.01s^{-1}$. Essa concordância pode ser adequada para $k = 0.005s^{-1}$. Os resultados mostrados na Figura 2-8 indicam que para valores de $k > 0.005s^{-1}$, dificilmente a resistência pode ser considerada numa perturbação. De fato, para $k > 0.01s^{-1}$ a resistência torna-se valor dominante no movimento do projétil.

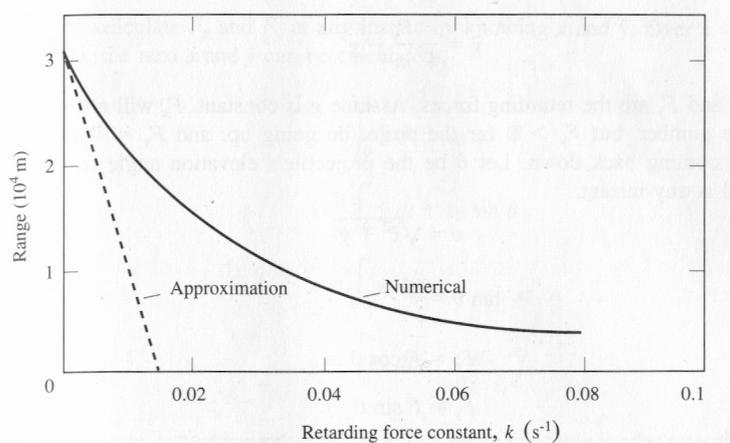


FIGURA 2-9 O valor de alcance calculado aproximadamente e numericamente para um dado projétil é mostrado na Figura 2-8 e plotado como uma função da força constante de retardamento k .

O exemplo anterior indica como o mundo real pode ser complicado. Neste exemplo, ainda podemos fazer algumas suposições não físicas – assumindo por exemplo que a força de retardamento é sempre linearmente proporcional a velocidade. Então nossos cálculos numéricos não são precisos, pois como mostra a Figura 2-3 a melhor suposição pode ser incluir um termo retardatório v^2 conforme necessário. Da mesma forma adicionando termos podemos resolver dificuldades com o cálculo numérico, e fazer um cálculo similar no próximo exemplo. Temos que incluir o arquivo do autor Matchcad para produzir as Figuras 2-8 e 2-9 no Apêndice H para aqueles estudantes poderem reproduzir os cálculos. Enfatizamos que há muitas formas para a performance do cálculo numérico com computadores, e o estudante irá provavelmente querer transformar números com praticidade.

EXEMPLO 2.8

Use os dados mostrados na Figura 2-3 para calcular a trajetória de um projétil real. Suponha uma velocidade do açame de 600m/s , a elevação do injetor de 45° , e uma massa do projétil de 30kg . Trace em um plano a altura y versus a distância horizontal x e trace y , \dot{x} , e \dot{y} versus o tempo com e sem resistência do ar. Inclua somente a resistência do ar e a gravidade, ignore outras forças possíveis tais como o elevador.

Solução: Primeiramente, façamos uma tabela da força de retardamento versus a velocidade interpretando a Figura 2-3. Interprete a força a cada 50m/s para a Figura 2-3c e a cada 100m/s para a Figura 2-3d. Podemos então usar uma linha reta entre os valores tabular. Usemos o sistema de coordenadas mostrado na Figura 2-7. A equação do movimento torna-se

$$\ddot{x} = -\frac{F_x}{m} \quad (2.56)$$

$$\ddot{y} = -\frac{F_y}{m} - g \quad (2.57)$$

onde F_x e F_y são as forças de retardamento. Suponha que g é constante. F_x será sempre um número positivo, mas $F_y > 0$ para o projétil que sobe, e $F_y < 0$ para o projétil que desce. Deixe θ ser o ângulo de elevação dos projéteis na horizontal em qualquer instante.

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \quad (2.58)$$

$$\tan \theta = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} \quad (2.59)$$

$$F_x = F \cos \theta \quad (2.60)$$

$$F_y = F \sin \theta \quad (2.61)$$

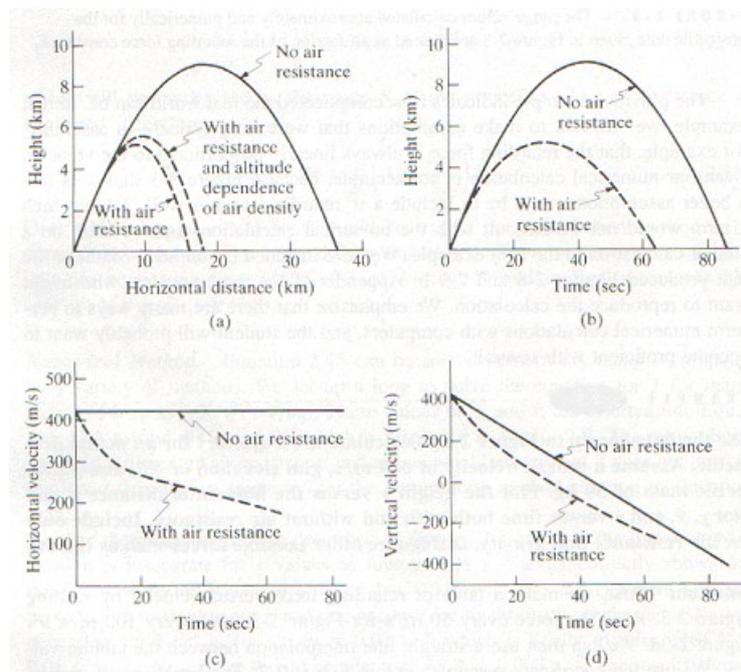


FIGURA 2-10 Os resultados do Exemplo 2.8. As linhas sólidas são os resultados se a resistência do ar não estiver incluída, enquanto que as linhas tracejadas abrangem os resultados que incluem a força de resistência do ar. Em (a) também incluímos o efeito da densidade do ar causando uma pequena dependência quando o projétil sobe.

Podemos calcular F_x e F_y para qualquer instante sabendo \dot{x} e \dot{y} . Acima de um intervalo pequeno do tempo, \dot{x} e \dot{y} podem ser calculados.

$$\dot{x} = \int_0^t \ddot{x} dt + v_0 \cos \theta \quad (2.62)$$

$$\dot{y} = \int_0^t \ddot{y} dt + v_0 \sin \theta \quad (2.63)$$

$$x = \int_0^t \dot{x} dt \quad (2.64)$$

$$y = \int_0^t \dot{y} dt \quad (2.65)$$

Escrevemos um programa de computador curto para conter nossa tabela para as forças de retardamento e para executar os cálculos para \dot{x} , \dot{y} , x , e y em função do tempo. Devemos calcular as integrais para intervalos pequenos de tempo pois as forças são dependentes do tempo. Figura 2-10 mostra os resultados.

Observe a grande diferença que a resistência do ar faz. Na Figura 2-10a, a distância horizontal (escala) que o projétil viaja é aproximadamente $16km$ comparados a quase $37km$ sem nenhuma resistência do ar. Nosso cálculo ignorou o fato que a densidade do ar depende da altura. Se fizermos exame da diminuição na densidade do ar com altura, obtemos a terceira curva com uma escala de $18km$ mostrados na Figura 2-10a. Se incluirmos também o elevador, a escala seria ainda maior. Observe que a mudança nas velocidades na Figura 2-10c e 2-10d espelham a força resistiva do ar da Figura 2-3. O decréscimo rápido da velocidade ocorre até alcançar a velocidade do som, e avalia então os níveis de mudança das velocidades um pouco fora.

Isto conclui nossa subseção dos efeitos das forças de retardamento. Muito mais coisas poderiam ser feitas para incluir efeitos reais, mas o método está desobstruído. Normalmente, um efeito é adicionado para um tempo, e os resultados são analisados antes que um outro efeito seja adicionado.

OUTROS EXEMPLOS DA DINÂMICA

Concluimos esta seção com dois exemplos padrão adicionais do comportamento dinâmico da partícula.

EXEMPLO 2.9

A Máquina de Atwood consiste em uma roldana lisa com dois corpos suspensos por uma corda de massa desprezível em cada ponta. Ache a aceleração dos corpos e a tensão na corda (a) quando a roldana está em repouso e (b) quando a roldana está dentro de um elevador descendo com aceleração constante α .

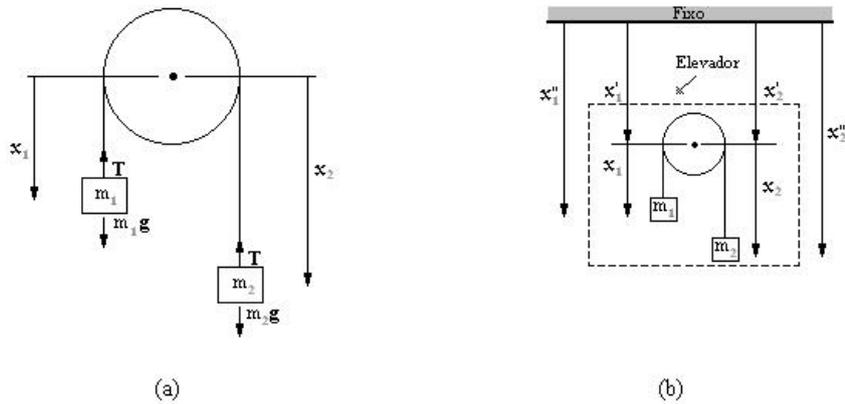


FIGURA 2-11

Solução: Desprezamos a massa da corda e assumimos que a roldana está lisa – isto é, não tem atrito com a corda. A tensão T deve ser a mesma por toda a corda. As equações de movimento se transformam, para cada massa, para o caso (a),

$$m_1 \ddot{x}_1 = m_1 g - T \quad (2.66)$$

$$m_2 \ddot{x}_2 = m_2 g - T \quad (2.67)$$

Observe novamente a finalidade do conceito de força: Precisamos apenas identificar as forças atuando em cada massa. A tensão T é a mesma em ambas equações. Se a corda é inextensível, então $\ddot{x}_2 = -\ddot{x}_1$, e as Equações 2.66 e 2.67 podem ser combinadas

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 &= m_1 g - (m_2 g - m_2 \ddot{x}_2) \\ &= m_1 g - (m_2 g + m_2 \ddot{x}_1) \end{aligned}$$

Rearranjando,

$$\ddot{x}_1 = \frac{g(m_1 - m_2)}{m_1 + m_2} = -\ddot{x}_2 \quad (2.68)$$

Se $m_1 > m_2$, então $\ddot{x}_1 > 0$, e $\ddot{x}_2 < 0$. A tensão pode ser obtida das Equações 2.68 e 2.66:

$$\begin{aligned} T &= m_1 g - m_1 \ddot{x}_1 \\ T &= m_1 g - m_1 g \frac{(m_1 - m_2)}{m_1 + m_2} \\ T &= \frac{2m_1 m_2 g}{m_1 + m_2} \quad (2.69) \end{aligned}$$

Para o caso (b), no qual a roldana está em um elevador, o sistema de coordenadas com origens no centro da roldana não está longe de ser um sistema inercial. Precisamos de um sistema inercial com origem no topo do cabo do elevador (Figura 2-11b). As equações de movimento no sistema inercial ($x''_1 = x'_1 + x_1$, $x''_2 = x'_2 + x_2$) são

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}'_1 &= m_1 (\ddot{x}'_1 + \ddot{x}_1) = m_1 g - T \\ m_2 \ddot{x}'_2 &= m_2 (\ddot{x}'_2 + \ddot{x}_2) = m_2 g - T \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 &= m_1 g - T - m_1 \ddot{x}'_1 = m_1(g - \alpha) - T \\ m_2 \ddot{x}_2 &= m_2 g - T - m_2 \ddot{x}'_2 = m_2(g - \alpha) - T \end{aligned} \right\} \quad (2.70)$$

onde $\ddot{x}'_1 = \ddot{x}'_2 = \alpha$. Temos $\ddot{x}_2 = -\ddot{x}_1$, assim resolvemos para \ddot{x}_1 eliminando-o antes

$$\ddot{x}_1 = -\ddot{x}_2 = (g - \alpha) \frac{(m_1 - m_2)}{m_1 + m_2} \quad (2.71)$$

e

$$T = \frac{2m_1 m_2 (g - \alpha)}{m_1 + m_2} \quad (2.72)$$

Repare que os resultados para a tensão e a aceleração estão corretos se a aceleração da gravidade estiver reduzida da quantidade de aceleração α do elevador. A alteração para um elevador ascendente deveria ser óbvia.

EXEMPLO 2.10 -----

No nosso último exemplo revimos muitas equações de movimento para uma partícula, examinamos o movimento da uma partícula como um campo eletromagnético. Considere uma partícula carregada entrando na região do campo magnético uniforme \mathbf{B} – por exemplo, o campo da terra – como mostra a Figura 2-12. Determine seu subsequente movimento.

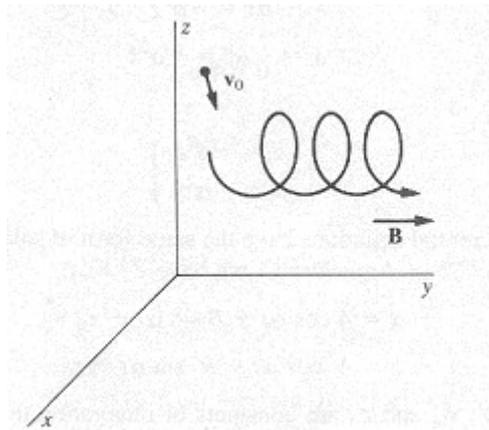


FIGURA 2-12

Solução: Escolhendo o sistema de coordenadas cartesianas com seu eixo y paralelo ao campo magnético. Se q é a carga da partícula, \mathbf{v} é sua velocidade, \mathbf{a} sua aceleração e \mathbf{B} o campo magnético da Terra, então:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j} + \dot{z}\mathbf{k} \\ \mathbf{a} &= \ddot{x}\mathbf{i} + \ddot{y}\mathbf{j} + \ddot{z}\mathbf{k} \\ \mathbf{B} &= B_0\mathbf{j} \end{aligned}$$

A força magnética $\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B} = m\mathbf{a}$, assim

$$m(\ddot{x}\mathbf{i} + \ddot{y}\mathbf{j} + \ddot{z}\mathbf{k}) = q(\dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j} + \dot{z}\mathbf{k}) \times B_0\mathbf{j} = qB_0(\dot{x}\mathbf{k} - \dot{z}\mathbf{i})$$

Igualando, as componentes vetoriais fornecem

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x} &= -qB_0\dot{z} \\ m\ddot{y} &= 0 \\ m\ddot{z} &= qB_0\dot{x} \end{aligned} \right\} \quad (2.73)$$

Integrando a segunda destas equações, $m\ddot{y} = 0$ temos:

$$\dot{y} = \dot{y}_0$$

Onde \dot{y}_0 é uma constante e é o valor inicial de \dot{y} . Integrando a segunda em função do tempo, fornece:

$$y = \dot{y}_0 t + y_0$$

onde y_0 também é uma constante.

Para integrar a 1ª e a última equação da Equação 2.73, admitimos $\alpha = qB_0/m$, assim então

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} &= -\alpha\dot{z} \\ \ddot{z} &= \alpha\dot{x} \end{aligned} \right\} \quad (2.74)$$

Estas duas simultâneas equações diferenciais podem facilmente ser desembreadas por uma diferenciação e substituindo na outra, fornecendo

$$\begin{aligned} \ddot{z} &= \alpha\ddot{x} = -\alpha^2\dot{z} \\ \ddot{x} &= -\alpha\ddot{z} = -\alpha^2\dot{x} \end{aligned}$$

assim então

$$\left. \begin{aligned} \dot{z} &= -\alpha^2\dot{z} \\ \dot{x} &= -\alpha^2\dot{x} \end{aligned} \right\} \quad (2.75)$$

Ambas destas equações diferenciais têm-se a mesma forma de solução. Usando a técnica do exemplo C.2 do apêndice C, temos

$$\begin{aligned} x &= A \cos \alpha t + B \sin \alpha t + x_0 \\ z &= A' \cos \alpha t + B' \sin \alpha t + z_0 \end{aligned}$$

Onde A, A', B, B', x_0 e z_0 são constantes de integração que são determinadas pela posição inicial e velocidade da partícula e pelas equações de movimento, Equação 2.74. Estas soluções podem ser reescritas

$$\left. \begin{aligned} (x - x_0) &= A \cos \alpha t + B \sin \alpha t \\ (y - y_0) &= \dot{y}_0 t \\ (z - z_0) &= A' \cos \alpha t + B' \sin \alpha t \end{aligned} \right\} \quad (2.76)$$

As coordenadas x e z são relacionadas pela Equação 2.74, assim substituindo as Equações ?? na primeira equação da Equação 2.74 determinando

$$-\alpha^2 A \cos \alpha t - \alpha^2 B \sin \alpha t = -\alpha(-\alpha A' \sin \alpha t + B' \cos \alpha t) \quad (2.77)$$

Porque a Equação 2.77 é válida para todo t , em particular $t = 0$ e $t = \pi/2\alpha$, Equação 2.77 produz

$$-\alpha^2 A = -\alpha^2 B'$$

que é

$$A = B'$$

e

$$-\alpha^2 B = \alpha^2 A'$$

fornece

$$B = -A'$$

nós agora temos

$$\left. \begin{aligned} (x - x_0) &= A \cos \alpha t + B \sin \alpha t \\ (y - y_0) &= \dot{y}_0 t \\ (z - z_0) &= -B \cos \alpha t + A \sin \alpha t \end{aligned} \right\} \quad (2.78)$$

se $t = 0$, $\dot{z} = \dot{z}_0$ e $\dot{x} = 0$, então da Equação 2.78, diferenciando e armando $t = 0$, fornece

$$\alpha B = 0$$

e

$$\alpha A = \dot{z}_0$$

então

$$\begin{aligned} (x - x_0) &= \frac{\dot{z}_0}{\alpha} \cos \alpha t \\ (y - y_0) &= \dot{y}_0 t \\ (z - z_0) &= \frac{\dot{z}_0}{\alpha} \sin \alpha t \end{aligned}$$

Finalmente,

$$\left. \begin{aligned} x - x_0 &= \left(\frac{\dot{z}_0 m}{q B_0} \right) \cos \left(\frac{q B_0 t}{m} \right) \\ (y - y_0) &= \dot{y}_0 t \\ z - z_0 &= \left(\frac{\dot{z}_0 m}{q B_0} \right) \sin \left(\frac{q B_0 t}{m} \right) \end{aligned} \right\} \quad (2.79)$$

Estas são equações parametrizadas da hélice circular de raio $\dot{z}_0 m / q B_0$. Assim, o mais rápido que a partícula entra no campo ou a maior massa, o lado do raio da hélice. E a maior carga da partícula ou o mais forte campo magnético, e pequena hélice. Note também como a partícula carregada é capturada pelo campo magnético - justamente flutuando ao longo da direção do campo. Neste exemplo, a partícula não tem nenhuma componente inicial da velocidade ao longo do eixo x , mas mesmo se tivesse ela não flutuaria ao longo do eixo (veja problema 2-31). Finalmente, note que a força magnética da partícula sempre atua perpendicular a uma velocidade e desde já não pode ser acelerada. A Equação 2.79 verifica este fato.

O campo magnético da Terra não é tão simples quanto o campo uniforme deste exemplo. No entanto este exemplo fornece uma percepção de um dos mecanismos pelo qual o campo magnético da terra prende raios cósmicos de baixa energia e o vento solar para criar zonas de Van Allen.

2.5 TEOREMAS DE CONSERVAÇÃO

Agora retornamos a uma discussão detalhada da mecânica Newtoniana de uma única partícula para derivar-mos teoremas importantes quanto a grandezas conservativas. Devemos enfatizar que não estamos *provando* a conservação de várias grandezas. Estamos simplesmente deduzindo as consequências das leis de Newton na dinâmica. Estas implicações podem ser testadas em experimentos e suas verificações então podem confirmar as leis da dinâmica. O fato é que esses teoremas de conservação têm realmente sido válidos em muitos exemplos e fornecem uma importante prova da exatidão das leis de Newton, pelo menos na física clássica.

O primeiro teorema de conservação de interesse é o **momento linear** de uma partícula. Se a partícula é *livre*, isto é, se a partícula não está sujeita a nenhuma força, então a Equação 2.2 fica simplesmente $\dot{\mathbf{p}} = 0$. Portanto, \mathbf{p} é um vetor constante no tempo, e o primeiro teorema de conservação é

I. *O momento linear total \mathbf{p} da partícula é conservado quando a força total é zero.*

Observe que este resultado é derivado de uma equação vetorial, $\dot{\mathbf{p}} = 0$, e portanto é aplicada para cada componente do momento linear. Para expressar o resultado de outra forma, seja \mathbf{s} algum vetor constante tal que $\mathbf{F} \cdot \mathbf{s} = 0$, independente do tempo.

Então

$$\dot{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{s} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{s} = 0$$

ou, integrando com relação ao tempo,

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{s} = \text{constante} \quad (2.80)$$

o qual afirma que o *componente do momento linear na direção em que a força torna-se nulo, é constante no tempo.*

O **momento angular** \mathbf{L} de uma partícula com relação a origem, da qual um vetor posição \mathbf{r} é medido, é definido por

$$\boxed{\mathbf{L} \equiv \mathbf{r} \times \mathbf{p}} \quad (2.81)$$

O **torque** ou o **momento de uma força** \mathbf{N} com relação a mesma origem, é definido como

$$\boxed{\mathbf{N} \equiv \mathbf{r} \times \mathbf{F}} \quad (2.82)$$

onde \mathbf{r} é o vetor posição da origem até o ponto onde a força \mathbf{F} é aplicada. Como $\mathbf{F} = m\dot{\mathbf{v}}$ para a partícula, o torque torna-se

$$\mathbf{N} = \mathbf{r} \times m\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{p}}$$

Agora

$$\dot{\mathbf{L}} = \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{p}) = (\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{p}) + (\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{p}})$$

mas

$$\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{p} = \dot{\mathbf{r}} \times m\mathbf{v} = m(\dot{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{r}}) \equiv 0$$

então

$$\boxed{\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{p}} = \mathbf{N}} \quad (2.83)$$

Se não há torque agindo na partícula (isto é, se $\mathbf{N} = 0$), então $\dot{\mathbf{L}} = 0$ e \mathbf{L} é um vetor constante no tempo. O segundo teorema importante da conservação é

II. *O momento angular de uma partícula não sujeita a torque é conservada.*

Lembramos que o estudante que uma escolha criteriosa da origem de um sistema de coordenadas frequentemente possibilitará que um problema seja resolvido muito mais facilmente do que uma escolha da origem de forma casual. Por exemplo, o torque será zero no sistema de coordenadas cujo centro está localizado na direção da resultante da força. O momento angular será conservado nesse caso.

Se o trabalho realizado sobre uma partícula por uma força \mathbf{F} transformando a partícula de uma Condição 1 para a Condição 2, então este **trabalho** é definido como sendo

$$W_{12} \equiv \int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad (2.84)$$

Se \mathbf{F} é a força resultante líquida agindo na partícula,

$$\begin{aligned} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= m \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} dt = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{v} dt \\ &= \frac{m}{2} \frac{d}{dt} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) dt = \frac{m}{2} \frac{d}{dt} (v^2) dt = d\left(\frac{1}{2}mv^2\right) \end{aligned} \quad (2.85)$$

A integração da Equação 2.84 é, assim, uma diferencial exata, e o trabalho feito pela força total \mathbf{F} agindo na partícula é igual a variação da sua energia cinética:

$$W_{12} = \left(\frac{1}{2}mv^2\right) \Big|_1^2 = \frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2) = T_2 - T_1 \quad (2.86)$$

onde $T \equiv \frac{1}{2}mv^2$ é a **energia cinética** da partícula. Se $T_1 > T_2$ então $W_{12} < 0$, a partícula realiza trabalho resultando no decréscimo de sua energia cinética. É importante ressaltar que a força \mathbf{F} da Equação 2.85 é a **força total** (isto é, resultante líquida das forças) sobre a partícula.

Vamos agora examinar a integral que aparece na Equação 2.84 de um ponto de vista diferente. Em muitos problemas físicos, a força \mathbf{F} tem a propriedade que o trabalho requerido para mover a partícula de uma posição para outra sem nenhuma mudança na energia cinética depende somente da posição inicial e final e não da trajetória tomada pela partícula. Por exemplo, assumindo o trabalho feito para mudar a partícula do ponto 1, na Figura 2-13, para o ponto 2 é independente das trajetórias reais a , b ou c . Esta propriedade é demonstrada, por exemplo, pelo campo gravitacional constante. Assim, se a partícula de massa m é levantada por uma altura h (por qualquer trajetória), então um trabalho mgh foi realizado sobre a partícula, e a partícula pode fazer um trabalho igual retornando para a sua posição original.

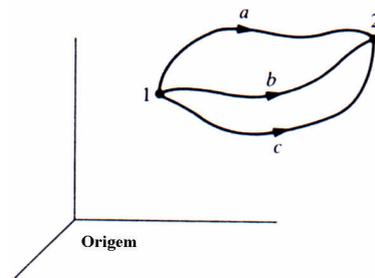


FIGURA 2-13

Esta capacidade de realizar trabalho é chamada **energia potencial** da partícula.

Podemos definir a energia potencial da partícula em termos do trabalho (feito pela força \mathbf{F}) requerido para transportar a partícula de um ponto 1 para um ponto 2 (sem troca líquida na energia cinética):

$$\int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = U_1 - U_2 \quad (2.87)$$

O trabalho feito para mover a partícula é simplesmente a diferença na energia potencial U nos dois pontos. Por exemplo, se levantamos uma maleta de uma posição 1 no chão até uma posição 2 sob uma mesa, nós como agente externo realizamos trabalho contra a força da gravidade. Seja a força \mathbf{F} da Equação 2.87 a força da gravidade, quando levantamos a maleta, $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ se torna negativo. O resultado da integração na Equação 2.87 é $U_2 - U_1$ negativo, então a energia potencial na posição 2 sob a mesa é maior que a da posição 1 no chão. A mudança na energia potencial $U_2 - U_1$ é o negativo do trabalho feito pela força gravitacional, como pode ser visto multiplicando-se ambos os lados da Equação 2.87 por -1 . Como agente externo, fazemos trabalho positivo (contra a gravidade) para elevar a energia potencial da maleta.

A Equação 2.87 pode ser reproduzida* se escrevemos \mathbf{F} como gradiente da função escalar U :

$$\boxed{\mathbf{F} = -\text{grad } U = -\nabla U} \quad (2.88)$$

Então

$$\int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = - \int_1^2 (\nabla U) \cdot d\mathbf{r} = - \int_1^2 dU = U_1 - U_2 \quad (2.89)$$

Na maioria dos sistemas de interesse, a energia potencial é função da posição e, possivelmente, do tempo: $U = U(\mathbf{r})$ ou $U = U(\mathbf{r}, t)$. Não consideramos casos em que a energia potencial é função da velocidade[†].

É importante perceber que a energia potencial é definida apenas dentro de uma constante aditiva; isto é, a força definida por $-\nabla U$ não é diferente daquela definida por $-\nabla(U + \text{constante})$. Portanto a energia potencial não tem um significado absoluto; apenas *diferenças* de energia potencial são fisicamente significativas (como na Equação 2.87).

Se escolhermos um certo sistema de referência inercial para descrever um processo mecânico, as leis do movimento são as mesmas como em qualquer outro sistema de referência em movimento uniforme relativo ao sistema de referência original. A velocidade de uma partícula é em geral diferente dependendo de qual sistema de referência inercial escolhermos como base para descrever o movimento. Então achamos que é impossível atribuir uma *energia cinética absoluta* para uma partícula do mesmo jeito que é impossível atribuir um significado absoluto para a energia potencial. Ambas limitações são resultado do fato que a escolha de uma *origem* do sistema de coordenadas usada para descrever processos físicos é sempre arbitrária. James Clerk Maxwell (1831 - 1879) resumiu a situação como sendo[‡]:

Devemos, portanto, considerar a energia de um sistema material como a grandeza a que devemos determinar o acréscimo ou diminuição enquanto o sistema passa de uma condição definida a outra. O valor absoluto de energia na condição padrão é desconhecida por nós, e isso não teria importância se fosse conhecida, como todos fenômenos dependem da variação de energia e não de seu valor absoluto.

Agora, definimos a **energia total** de uma partícula como a soma das energias cinética e potencial:

$$\boxed{E \equiv T + U} \quad (2.90)$$

*A condição necessária e suficiente que permite uma função vetorial ser representada pelo gradiente de uma função escalar é que o rotacional da função vetorial se anule identicamente.

[†]Potenciais dependentes da velocidade são necessários em certas situações, e.g., no eletromagnetismo (os chamados potenciais de Liénard-Wiechert)

[‡]J. C. Maxwell, *Matter and Motion* (Cambridge, 1877), p.91.

A derivada total na variável tempo de E é

$$\frac{dE}{dt} = \frac{dT}{dt} + \frac{dU}{dt} \quad (2.91)$$

Para obter as derivadas temporais que aparecem à direita da equação, primeiro notemos que a Equação 2.85 pode ser escrita como:

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = d\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = dT \quad (2.92)$$

Dividindo por dt ,

$$\frac{dT}{dt} = \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{F} \cdot \dot{\mathbf{r}} \quad (2.93)$$

Temos também

$$\begin{aligned} \frac{dU}{dt} &= \sum_i \frac{\partial U}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} + \frac{\partial U}{\partial t} \\ &= \sum_i \frac{\partial U}{\partial x_i} \dot{x}_i + \frac{\partial U}{\partial t} \\ &= (\nabla U) \cdot \dot{\mathbf{r}} + \frac{\partial U}{\partial t} \end{aligned} \quad (2.94)$$

Substituindo as Equações 2.93 e 2.94 na 2.91, encontramos

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= \mathbf{F} \cdot \dot{\mathbf{r}} + (\nabla U) \cdot \dot{\mathbf{r}} + \frac{\partial U}{\partial t} \\ &= (\mathbf{F} + \nabla U) \cdot \dot{\mathbf{r}} + \frac{\partial U}{\partial t} \\ &= \frac{\partial U}{\partial t} \end{aligned} \quad (2.95)$$

como o termo $\mathbf{F} + \nabla U$ desaparece em vista da definição de energia potencial (Equação 2.88) se a força total for uma força conservativa $\mathbf{F} = -\nabla U$.

Se U não for uma função explícita do tempo (i.e., se $\partial U/\partial t = 0$; lembre que não consideramos potenciais dependentes da velocidade), o campo de força representado por \mathbf{F} é **conservativo**. Sob estas condições temos o terceiro teorema importante da conservação:

III. *A energia total E de uma partícula em um campo de forças conservativo é constante no tempo.*

Deve ser repetido que não provamos as leis de conservação do momento linear, momento angular, e energia. Apenas derivamos várias consequências das leis de Newton; isto é, se estas leis são válidas em uma certa situação, então momento e energia serão conservados. Mas nos tornamos tão apaixonados por estes teoremas de conservação que os elevamos ao nível de leis e *insistimos* que eles são válidos em qualquer teoria física, até mesmo aquelas aplicadas a situações em que a mecânica Newtoniana não é válida, como por exemplo, na interação de cargas em movimento ou em sistemas de mecânica quântica. Ainda não temos leis de conservação para estas situações, mas sim postulados da conservação que forçamos sobre a teoria. Por, exemplo, se temos duas cargas elétricas isoladas em movimento, as forças eletromagnéticas entre elas não são conservativas. Portanto, dotamos o campo eletromagnético de uma certa quantidade de energia para que a conservação de energia seja válida. Este procedimento é satisfatório apenas se as consequências não contradizem nenhum fato experimental, e este é o caso das cargas em movimento. Então estendemos o conceito usual de energia para incluir “energia eletromagnética” e satisfazer nossa pré-concebida noção de que a energia deve ser conservada. Pode parecer um arbitrário e drástico passo a se dar, mas nada, que foi dito, sucedeu com tanto sucesso, e estas “leis” da conservação foram o mais bem sucedido

conjunto de princípios da física. A recusa em abandonar a conservação de energia e momento levaram Wolfgang Pauli (1900-1958) a postular em 1930 a existência do neutrino para ajustar as contas que não “fechavam” para energia e momento no decaimento radiativo β . Este postulado permitiu a Enrico Fermi (1901 - 1954) construir uma grande teoria do decaimento β em 1934, mas a observação direta do neutrino não foi feita até 1953, quando Reines e Cowan realizaram seu famoso experimento*. Aderindo a convicção que energia e momento devem ser conservados, uma nova partícula elementar foi descoberta, que é de grande importância nas teorias modernas....

EXEMPLO 2.11

Um ratinho de massa “ m ” joga-se sobre a borda externa de uma pá de um ventilador de teto girando livremente com momento de inércia “ I ” e raio “ R ”. De qual razão é alterada a velocidade angular?

Solução: O momento angular deve ser conservado durante o processo. Usaremos o conceito de momento de inércia aprendido na física elementar para relacionar momento angular L com a velocidade angular ω : $L = I\omega$. O momento angular inicial $L_0 = I\omega_0$ deve ser igual ao momento angular L (ventilador mais ratinho) após o ratinho ter se jogado sobre o ventilador. A velocidade da borda externa da pá é $v = \omega R$.

$$L = I\omega + mvR = \frac{v}{R}(I + mR^2)$$

$$L = L_0 = I\omega_0$$

$$\frac{v}{R}(I + mR^2) = I\frac{v_0}{R}$$

$$\frac{v}{v_0} = \frac{I}{I + mR^2}$$

e

$$\frac{\omega}{\omega_0} = \frac{I}{I + mR^2}$$

2.6 ENERGIA

O conceito de energia era mais popular na época de Newton que atualmente. Mais tarde estudaremos duas novas formulações da dinâmica, diferentes da de Newton e baseada na energia – o método Lagrangiano e o Hamiltoniano.

Por volta do século *XIX*, tornou-se claro que o calor era outra forma de energia e não uma forma de fluido(chamado “calórico”) que fluia entre corpos quente e frio. Conde Rumford[†], a quem é dado o crédito, que a grande quantidade de calor gerada na perfuração dos canhões era causada pelo atrito e não pelo chamado calórico. A energia produzida pelo atrito é apenas a energia calorífica, trocável com a energia mecânica, e assim a conservação total de energia é satisfeita.

*C. L. Cowan, F. Reines, F. B. Harrison, H. W. Kruse, e A. D. McGuire, *Science*, **124**, 103 (1956).

[†]Benjamim Thompson (1753 - 1814) nascido em Massachusetts e emigrado para Europa em 1776 como um refúgio legalista. Em meio as atividades deste militar destacado e, depois, na carreira científica, ele supervisionou a perfuração dos canhões como chefe do departamento de guerra da Bavaria

Por todo o século XIX, cientistas realizaram experimentos sobre conservação de energia, resultando na importância que ela tem atualmente. Hermann von Helmholtz (1821 - 1894) formulou a lei geral da conservação de energia em 1847. Baseado na conclusão do experimento calorimétrico de James Perscott Joule (1818 - 1889) que iniciou em 1840.

Considere uma partícula pontual sob influência de uma força conservativa com potencial U . A conservação de energia (na realidade, energia mecânica, para ser exato neste caso) está refletida na Equação 2.90.

$$E = T + U = \frac{1}{2}mv^2 + U(x) \quad (2.96)$$

onde consideramos somente o caso unidimensional. Podemos reescrever a Equação 2.96 como

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2}{m}[E - U(x)]} \quad (2.97)$$

e integrando

$$t - t_0 = \int_{x_0}^x \frac{\pm dx}{\sqrt{\frac{2}{m}[E - U(x)]}} \quad (2.98)$$

onde $x = x_0$ e $t = t_0$. Temos formalmente a solução para o caso unidimensional na Equação 2.98; isto é, encontramos $x(t)$. Todo o restante é inserido no potencial $U(x)$ da Equação 2.98 e integrado, usando cálculos numéricos se necessário. Estudaremos mais adiante com alguns detalhes o potencial $U = \frac{1}{2}kx^2$ para oscilações harmônicas e $U = -k/x$ para a força gravitacional.

Podemos ter uma boa idéia a respeito do movimento de uma única partícula examinando o gráfico de um exemplo de $U(x)$ conforme mostra a Figura 2-14. Primeiro, nota-se que, devido a $\frac{1}{2}mv^2 = T \geq 0, E \geq U(x)$, para algum movimento físico real. Vê-se na Figura 2-14 que o movimento é *ligado** para as energias E_1 e E_2 . Para E_1 , o movimento é *periódico*, entre os *pontos de retorno* x_a e x_b . Similarmente, para E_2 o movimento também é periódico, porém há duas possíveis regiões: $x_c \leq x \leq x_d$ e $x_e \leq x \leq x_f$. A partícula não pode “saltar” de uma “cavidade” para outra; uma vez numa cavidade, a partícula permanecerá nela para sempre se a sua energia for sempre E_2 . O movimento para uma partícula com energia E_0 tem um único valor, $x = x_0$. A partícula está em repouso com $T = T_0 [E_0 = U(x_0)]$.

O movimento para a partícula de energia E_3 é simples: a partícula vem do infinito, pára em $x = x_g$ e retorna para o infinito—muito semelhante a uma bola de tênis arremessada contra uma parede. Para a energia E_4 , o movimento é não-ligado e a partícula pode estar em qualquer posição. Sua velocidade mudará conforme se movimentar porque depende da diferença entre E_4 e $U(x)$. Se a partícula se move para a direita, sua velocidade aumentará e diminuirá mas continuará movendo-se para o infinito.

O movimento da partícula E_1 é semelhante ao de uma massa presa a uma mola. O potencial na região $x_a < x < x_b$ pode ser aproximadamente $U(x) = \frac{1}{2}k(x - x_0)^2$. Uma partícula com energia em torno de E_0 oscilará quase no ponto $x = x_0$. Estes pontos são como um **ponto de equilíbrio**, porque a partícula está no ponto $x = x_0$ ela permanecerá ali. O equilíbrio pode ser estável, instável ou neutro. O único equilíbrio examinado é o *estável* porque se a partícula está localizada na região onde $x = x_0$ deverá finalmente retornar ao ponto. Podemos usar uma tigela esférica e uma bolinha de aço como um exemplo. Com a tigela na sua posição natural, a bola pode rolar de um ponto a outro no interior da tigela; mas finalmente ficará em repouso na sua base—em outros termos, há um equilíbrio estável. Se virarmos a tigela com borda superior para baixo e colocar a bola precisamente em $x = x_0$ (no topo da tigela), a bola estará em equilíbrio. Se a bola estiver localizada levemente fora do ponto $x = x_0$, ela rola para fora (descerá!!); chamamos este equilíbrio de *instável*. O equilíbrio *neutro* é observado quando a bola estiver rolando sobre um plano polido, numa superfície horizontal.

Em geral, podemos expressar o potencial $U(x)$ em séries de Taylor em torno do ponto de equilíbrio. Por simplicidade, assumimos o ponto de equilíbrio para $x = 0$ em $x = x_0$ (se não,

*N.T.: *ligado* aqui significa *confinado* a uma certa região do espaço.

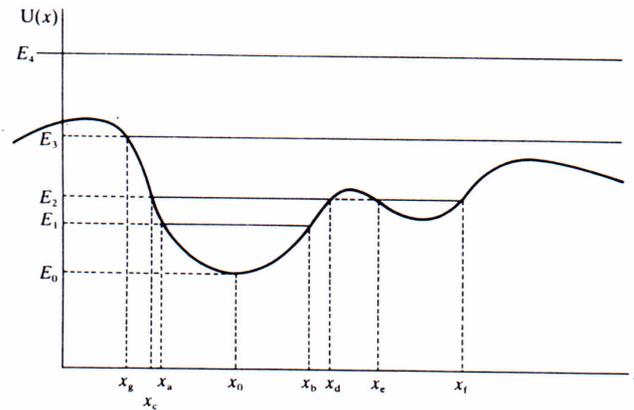


FIGURA 2-14

podemos redefinir o sistema de coordenadas para obtê-lo). Então temos

$$U(x) = U_0 + x \left(\frac{dU}{dx} \right)_0 + \frac{x^2}{2!} \left(\frac{d^2U}{dx^2} \right)_0 + \frac{x^3}{3!} \left(\frac{d^3U}{dx^3} \right)_0 + \dots \quad (2.99)$$

O subscrito zero indica que esta grandeza está sendo calculada em $x = 0$. A energia potencial U_0 para $x = 0$ é simplesmente uma constante que podemos definir como sendo zero sem que haja qualquer tipo de perda ou generalização. Se $x = 0$ é um ponto de equilíbrio, então

$$\left(\frac{dU}{dx} \right)_0 = 0 \quad \text{Ponto de Equilíbrio} \quad (2.100)$$

e a Equação 2.99 fica

$$U(x) = \frac{x^2}{2!} \left(\frac{d^2U}{dx^2} \right)_0 + \frac{x^3}{3!} \left(\frac{d^3U}{dx^3} \right)_0 + \dots \quad (2.101)$$

Próximo ao ponto de equilíbrio $x = 0$, o valor do x é pequeno, e cada termo na Equação 2.101 é muito menor do que o anterior. Por essa razão, pegamos somente o primeiro termo na Equação 2.101:

$$U(x) = \frac{x^2}{2} \left(\frac{d^2U}{dx^2} \right)_0 \quad (2.102)$$

Podemos determinar se o equilíbrio em $x = 0$ é estável ou instável examinando o termo $(d^2U/dx^2)_0$. Se o $x = 0$ o equilíbrio é estável, $U(x)$ deve ser maior (mais positivo) no outro lado de $x = 0$. Como x^2 é sempre positivo, as condições para o equilíbrio são

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^2U}{dx^2} \right)_0 > 0 & \quad \text{Equilíbrio Estável} \\ \left(\frac{d^2U}{dx^2} \right)_0 < 0 & \quad \text{Equilíbrio Instável} \end{aligned} \quad (2.103)$$

Caso $(d^2U/dx^2)_0$ for zero, os termos de ordem superior devem ser examinados (ver Problema 2-45 e 2-46).

EXEMPLO 2.12

Considerando um sistema de roldanas, massas e fios finos apresentado na Figura 2-15. Um fio de comprimento b é fixado no ponto A , passando sobre uma roldana no ponto B localizada a uma distância $2d$, e finalmente liga-se na massa m_1 . Outra roldana com massa m_2 é fixada passando sobre o fio, puxando-o para baixo entre A e B . Calcule a distância x_1 quando o sistema está em equilíbrio e determine se o equilíbrio é estável ou não. Essas roldanas não possuem massa.

Solução: Podemos resolver este exemplo usando forças (i. e., quando $\ddot{x}_1 = 0 = \dot{x}_1$) ou energia. Escolhemos o método da energia, porque em equilíbrio a energia cinética é zero e necessitamos quantificar somente com a energia potencial quando a Equação 2.100 é aplicada.

Admitindo $U = 0$ ao longo da linha AB .

$$U = -m_1gx_1 - m_2g(x_2 + c) \quad (2.104)$$

Assumindo que a polia que suporta a massa m_2 é pequena, então podemos ignorar o raio. A distância c na Figura 2-15 é constante.

$$x_2 = \sqrt{[(b - x_1)^2/4] - d^2}$$

$$U = -m_1gx_1 - m_2g\sqrt{[(b - x_1)^2/4] - d^2} - m_2gc$$

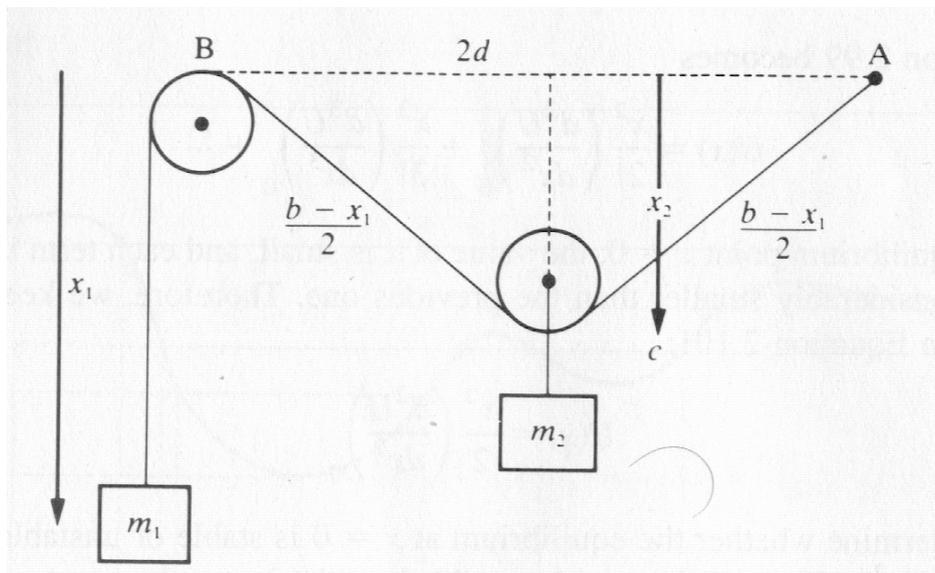


FIGURA 2-15

Por determinação $dU/dx_1 = 0$, podemos determinar a posição de equilíbrio $(x_1)_0 \equiv x_0$:

$$\begin{aligned} \left(\frac{dU}{dx_1}\right)_0 &= -m_1g + \frac{m_2g(b-x_0)}{4\sqrt{[(b-x_1)^2/4]-d^2}} = 0 \\ 4m_1\sqrt{[(b-x_1)^2/4]-d^2} &= m_2(b-x_0) \\ (b-x_0)^2(4m_1^2-m_2^2) &= 16m_1^2d^2 \\ x_0 &= b - \frac{4m_1d}{\sqrt{4m_1^2-m_2^2}} \end{aligned} \quad (2.105)$$

Note que a real solução existe somente quando $4m_1^2 > m_2^2$.

Sob quais circunstâncias a massa m_2 irá puxar m_1 até a polia B (i. e., $x_1 = 0$)? Podemos usar a Equação 2.103 para determinar se o equilíbrio é estável ou não:

$$\frac{d^2U}{dx_1^2} = \frac{-m_2g}{4\{[(b-x_1)^2/4]-d^2\}^{1/2}} + \frac{m_2g(b-x_1)^2}{16\{[(b-x_1)^2/4]-d^2\}^{3/2}}$$

Agora insira $x_1 = x_0$.

$$\left(\frac{d^2U}{dx_1^2}\right)_0 = \frac{g(4m_1^2-m_2^2)^{3/2}}{4m_2^2d}$$

A condição para o equilíbrio (movimento real) previamente foi para $4m_1^2 > m_2^2$, então o equilíbrio, quando ele existe, será estável, porque $(d^2U/dx_1^2)_0 > 0$.

EXEMPLO 2.13

Considere um potencial unidimensional

$$U(x) = \frac{-Wd^2(x^2 + d^2)}{x^4 + 8d^4} \quad (2.106)$$

Trace o potencial e discuta o movimento dos diversos valores de x . É um movimento ligado ou não ligado? Em um gráfico, mostre onde estão os valores de equilíbrio. São eles estáveis ou instáveis? Encontre o ponto de giro para $E = -W/8$, sabendo-se que W é uma constante positiva.

Solução: Reescreva o potencial como

$$Z(y) = \frac{U(x)}{W} = \frac{-(y^2 + 1)}{y^4 + 8} \quad \text{onde } y = \frac{x}{d} \quad (2.107)$$

Primeiro, encontre os pontos de equilíbrio, considerando o potencial.

$$\frac{dZ}{dy} = \frac{-2y}{y^4 + 8} + \frac{4y^3(y^2 + 1)}{(y^4 + 8)^2} = 0$$

Isto é reduzido para

$$\begin{aligned} y(y^4 + 2y^2 - 8) &= 0 \\ y(y^2 + 4)(y^2 - 2) &= 0 \\ y_0^2 &= 2, 0 \end{aligned}$$

Assim

$$\left. \begin{aligned} x_{01} &= 0 \\ x_{02} &= \sqrt{2}d \\ x_{03} &= -\sqrt{2}d \end{aligned} \right\} \quad (2.108)$$

Estes são os três pontos de equilíbrio. Consideremos $U(x)/W$ versus x/d na Figura 2-16.

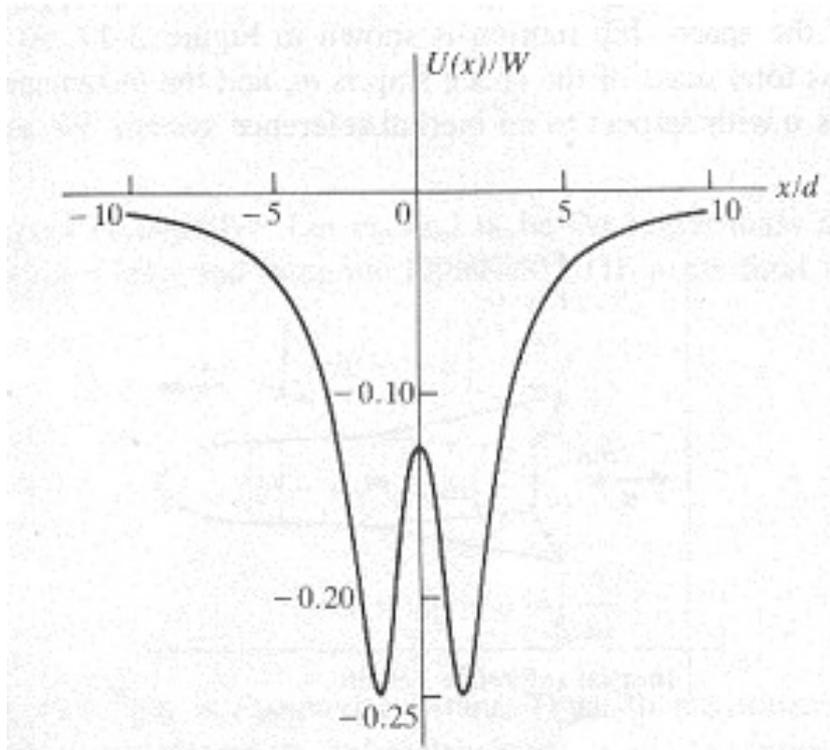


FIGURA 2-16

O equilíbrio é estável em x_{02} e x_{03} , mas instável em x_{01} . O movimento é delimitado para todas energias $E < 0$. Por fim, determinamos todos os pontos de giro para energia E por colocação $E = U(x)$.

$$E = -\frac{W}{8} = U(y) = \frac{-W(y^2 + 1)}{y^4 + 8} \quad (2.109)$$

$$y^4 + 8 = 8y^2 + 8$$

$$y^4 = 8y^2$$

$$y = \pm 2\sqrt{2}, 0 \quad (2.110)$$

Os pontos de giro obtidos para $E = -W/8$, são $x = -2\sqrt{2}d$ e $+2\sqrt{2}d$, assim com $x = 0$ – quando o ponto de equilíbrio é instável.

2.7 MOVIMENTO DE FOGUETES

A dinâmica Newtoniana elementar possui uma aplicação interessante no Movimento de Foguetes. Examinaremos dois casos, (1) movimento de foguetes no espaço livre e (2) ascensão vertical de foguetes sob efeito da gravidade. O primeiro caso exige uma aplicação da conservação do momento linear. O segundo, requer aplicações mais complexas da Segunda Lei de Newton.

Movimento de Foguetes no Espaço Livre

Aqui assumiremos que o foguete (espaçonave) move-se sem influência de forças externas. Escolhemos um sistema fechado no qual a Segunda Lei de Newton possa ser aplicada. No espaço livre (*espaço sideral*) o movimento da espaçonave dependerá totalmente de sua própria energia. Ela se movimentará pela reação à massa ejetada com velocidade elevada, isto é, para conservar o momento linear, a espaçonave deverá se mover na direção oposta. O diagrama do movimento da espaçonave é mostrado na figura 2-17. Num tempo qualquer t , a massa total instantânea da espaçonave é m e a velocidade instantânea é v em relação ao sistema de referência inercial.

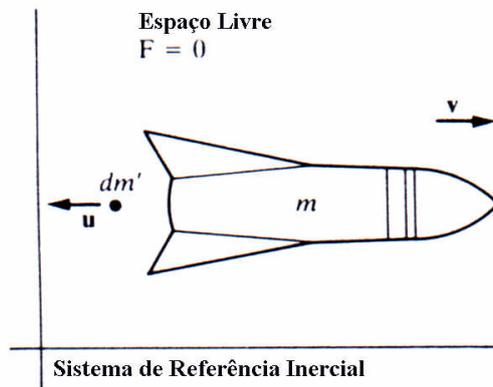


FIGURA 2-17

Assumiremos que haverá movimento apenas na direção x , desta forma eliminaremos a notação vetorial. Durante o intervalo de tempo dt uma massa dm' será ejetada pelo sistema de propulsão do foguete com velocidade $-u$ em relação a espaçonave. Imediatamente após a massa dm' ser ejetada, a massa da espaçonave e sua velocidade serão $m - dm'$ e $v + dv$, respectivamente.

$$\text{Momento inicial} = mv \quad (\text{no tempo } t) \quad (2.111)$$

$$\text{Momento final} = \underbrace{(v - dm')(v + dv)}_{\text{Espaçonave sem } dm'} + \underbrace{dm'(v - u)}_{\text{Descarga do foguete } dm'} \quad (\text{no tempo } t + dt) \quad (2.112)$$

Observe que a velocidade de ejeção da massa dm' em relação ao sistema de referência é $v - u$. A conservação do momento linear exige que as Equações 2.111 e 2.112 sejam iguais. Não há forças

externas ($F_{ext} = 0$).

$$p_{\text{inicial}} = p_{\text{final}}$$

$$\begin{aligned} p(t) &= p(t + dt) \\ mv &= (m - dm')(v + dv) + dm'(v - u) \\ mv &= mv + mdv - vdm' - dm'dv + vdm' - udm' \\ mdv &= udm' \end{aligned} \quad (2.113)$$

$$dv = u \frac{dm'}{m} \quad (2.114)$$

Onde desprezamos o produto das duas diferenciais $dm'dv$. Temos que considerar que dm' seja uma massa positiva ejetada da espaçonave. A mudança na massa da própria espaçonave é dm , onde

$$dm = -dm' \quad (2.115)$$

e

$$dv = -u \frac{dm}{m} \quad (2.116)$$

porque dm deve ser negativo. Assumindo m_0 e v_0 como sendo a massa e velocidade inicial da espaçonave, respectivamente, e integrando a Equação 2.116 para os valores finais de m e v .

$$\begin{aligned} \int_{v_0}^v dv &= -u \int_{m_0}^m \frac{dm}{m} \\ v - v_0 &= u \ln \left(\frac{m_0}{m} \right) \end{aligned} \quad (2.117)$$

$$v = v_0 + u \ln \left(\frac{m_0}{m} \right) \quad (2.118)$$

A velocidade de exaustão u é considerada constante. Assim, para maximizar a velocidade da espaçonave, precisamos maximizar a velocidade de exaustão u e a razão m_0/m .

Sendo que a velocidade final da espaçonave é limitada pela razão $\frac{m_0}{m}$, os engenheiros tiveram que construir foguetes com multi-estágios. A massa mínima (sem combustível) da espaçonave é limitada pela estrutura do material. Contudo, se o tanque de combustível puder ser dispensado após a queima, a massa restante da espaçonave será menor. A espaçonave poderá conter dois ou mais tanques de combustível, podendo cada um deles ser descartados separadamente.

Por exemplo, seja

$$\begin{aligned} m_0 &= \text{Massa total inicial da espaçonave} \\ m_1 &= m_a + m_b \\ m_a &= \text{Massa do primeiro estágio carregado} \\ m_b &= \text{Massa do primeiro estágio (tanque de combustível, etc.)} \\ v_1 &= \text{Velocidade final do primeiro estágio na combustão} \\ &\quad \text{completa, após todo combustível ser queimado} \\ v_1 &= v_0 + u \ln \left(\frac{m_0}{m_1} \right) \end{aligned} \quad (2.119)$$

Após a combustão completa a velocidade v_1 do primeiro estágio é alcançada, e a massa m_b é descartada no espaço. A seguir, o foguete do segundo estágio é acionado com a mesma velocidade

de exaustão, e temos então

m_a = Massa total inicial da espaçonave no segundo estágio

$m_2 = m_c + m_d$

m_c = Massa do segundo estágio carregado

m_d = Massa do segundo estágio (tanque de combustível, etc.)

v_1 = Velocidade inicial do segundo estágio

v_2 = Velocidade final do segundo estágio após combustão completa

$$v_2 = v_1 + u \ln \left(\frac{m_a}{m_2} \right) \quad (2.120)$$

$$v_2 = v_0 + u \ln \left(\frac{m_0 m_a}{m_1 m_2} \right) \quad (2.121)$$

O produto $(m_0 m_a / m_1 m_2)$ pode ser muito maior que somente (m_0 / m_1) . Foguetes com multi-estágios são mais comumente usados na decolagem sob a ação da gravidade do que no espaço livre.

Vimos que as espaçonaves são impulsionadas como resultado da conservação do momento linear. Mas os engenheiros e cientistas preferem se referir ao termo força através da expressão “propulsão” do foguete. Se multiplicarmos a Equação 2.116 por m e dividirmos os dois lados por dt , temos

$$m \frac{dv}{dt} = -u \frac{dm}{dt} \quad (2.122)$$

Como no lado esquerdo da equação “aparece” ma (força), o lado direito é chamado de propulsão:

$$\text{Propulsão} \equiv -u \frac{dm}{dt} \quad (2.123)$$

Como dm/dt é negativo, a propulsão será positiva.

ASCENSÃO VERTICAL SOB A AÇÃO DA GRAVIDADE

O movimento real de um foguete tentando deixar o campo gravitacional da terra é muito complicado. Para propósitos analíticos, começamos fazendo várias simplificações. O foguete terá somente movimento vertical, sem um componente horizontal. Desprezaremos a resistência do ar e assumiremos que a aceleração da gravidade é constante com a altura. Também assumiremos que a taxa de queima de combustível seja constante. Todos estes fatores que foram desprezados podem ser incluídos em uma análise numérica computacional.

Podemos usar os resultados do caso anterior de movimento de foguete em um espaço livre, porém não temos mais $F_{\text{ext}} = 0$. A geometria está apresentada na Figura 2-18. Novamente temos dm' positiva, com $dm = -dm'$. A força externa F_{ext} é

$$F_{\text{ext}} = \frac{d}{dt}(mv)$$

ou

$$F_{\text{ext}} dt = d(mv) = dp = p(t + dt) - p(t) \quad (2.124)$$

com respeito a um pequeno instante de tempo diferencial.

Para o sistema da nave espacial, encontramos as equações do momento linear final e inicial nas Equações 2.111–2.116. Agora usamos estes resultados na equação 2.116 para obter

$$P(t + dt) - p(t) = mdv + udm \quad (2.125)$$

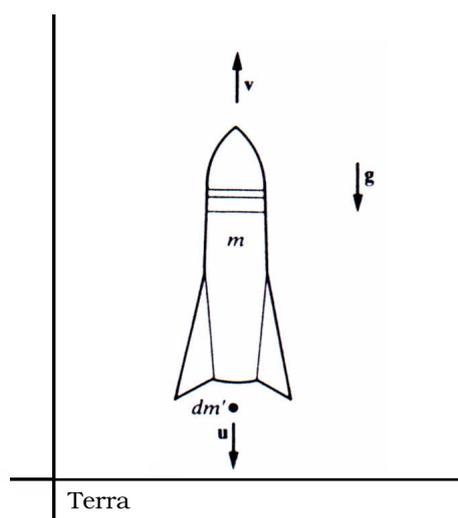


FIGURA 2-18

No espaço livre, $F_{\text{ext}} = 0$, mas na ascensão, $F_{\text{ext}} = -mg$. Combinando as Equações 2.124 e 2.125 obtemos

$$F_{\text{ext}} dt = -mg dt = m dv + u dm \Rightarrow -mg = m\dot{v} + u\dot{m} \quad (2.126)$$

Como a taxa de queima de combustível é constante,

$$\dot{m} = \frac{dm}{dt} = -\alpha, \quad \alpha > 0 \quad (2.127)$$

a Equação 2.126 se torna

$$dv = \left(-g + \frac{\alpha}{m} u\right) dt \quad (2.128)$$

Esta equação, entretanto, tem três variáveis desconhecidas (v, m, t), portanto, usamos a Equação 2.127 para eliminar o tempo, obtendo

$$dv = \left(\frac{g}{\alpha} - \frac{u}{m}\right) dm \quad (2.129)$$

Assumindo que os valores inicial e final da velocidade sejam 0 e v , respectivamente e da massa m_0 e m respectivamente, assim temos que

$$\int_0^v dv = \int_{m_0}^m \left(\frac{g}{\alpha} - \frac{u}{m}\right) dm$$

$$v = -\frac{g}{\alpha}(m_0 - m) + u \ln\left(\frac{m_0}{m}\right) \quad (2.130)$$

Podemos integrar a Equação 2.127 para obter o tempo:

$$\int_{m_0}^m dm = -\alpha \int_0^t dt$$

$$m_0 - m = \alpha t \quad (2.131)$$

A Equação 2.130 se torna

$$v = -gt + u \ln\left(\frac{m_0}{m}\right) \quad (2.132)$$

Podemos continuar com a Equação 2.130 e integrar mais uma vez para determinar a altura do foguete (problema 2-52). Tal integração é tediosa e o problema é facilmente manejado por métodos computacionais. Mesmo com o fim da exaustão, o foguete continuará subindo porque ainda possui velocidade vertical de subida. Eventualmente, com as simplificações precedentes, a força gravitacional irá parar o foguete (porque assumimos a gravidade constante, sem diminuir com a altura).

Uma situação interessante ocorre quando a velocidade de exaustão u não é suficientemente grande para fazer v na Equação 2.132 ser positiva. Neste caso, o foguete permanecerá no chão. Esta situação ocorre por causa dos limites de integração que assumimos na Equação 2.130. Deveria ser necessário queimar combustível suficiente antes que a propulsão do foguete o levantasse do chão (ver problema 2-54). É claro que foguetes não são projetados desta maneira; eles são feitos para alcançar alturas desejadas a medida que os foguetes atingem taxa de queima máxima.

EXEMPLO 2.14

Considere o primeiro estágio de um foguete Saturno V usado pelo programa lunar Apollo. A massa inicial é de $2.8 \times 10^6 \text{kg}$, e a massa de combustível do primeiro estágio é de $2.1 \times 10^6 \text{kg}$. Assuma uma baixa propulsão de $37 \times 10^6 \text{N}$. A velocidade de exaustão é de $2,600 \text{m/s}$. Calcule a velocidade final do primeiro estágio após a combustão. Usando o resultado do Problema 2-52 (Equação 2.133). Logo após, calcule a altura de combustão.

Solução: Para a propulsão (Equação 2.123), determinamos o valor da combustão:

$$\frac{dm}{dt} = \frac{\text{Propulsão}}{-u} = \frac{37 \times 10^6 \text{N}}{-2600 \text{m/s}} = -1.42 \times 10^4 \text{Kg/s}$$

A massa final do foguete é $(2.8 \times 10^6 \text{kg} - 2.1 \times 10^6 \text{kg})$ que é igual a $0.7 \times 10^6 \text{kg}$. Podemos usar a Equação 2.130 para determinarmos a velocidade do foguete durante a combustão (v_b):

$$v_b = -\frac{9.8 \text{m/s}^2 (2.1 \times 10^6 \text{kg})}{1.42 \times 10^4 \text{kg/s}} + 2600 \text{m/s} \ln \left[\frac{2.8 \times 10^6 \text{kg}}{0.7 \times 10^6 \text{kg}} \right]$$

$$v_b = 2.16 \times 10^3 \text{m/s}$$

O momento da combustão t_b , dado pela Equação 2.131, é

$$t_b = \frac{m_0 - m}{\alpha} = \frac{2.1 \times 10^6 \text{kg}}{1.42 \times 10^4 \text{kg/s}} = 148 \text{s}$$

ou aproximadamente $2\frac{1}{2} \text{min}$.

Usamos o resultado do Problema 2-52 para obtermos a altura da combustão y_b :

$$y_b = ut_b - \frac{1}{2}gt_b^2 - \frac{mu}{\alpha} \ln \left(\frac{m_0}{m} \right) \quad (2.133)$$

$$y_b = (2600 \text{m/s})(148 \text{s}) - \frac{1}{2}(9.8 \text{m/s}^2) \cdot (148 \text{s})^2$$

$$- \frac{(0.7 \times 10^6 \text{kg}) \cdot (2600 \text{m/s})}{1.42 \times 10^4 \text{kg/s}} \ln \left(\frac{2.8 \times 10^6 \text{kg}}{0.7 \times 10^6 \text{kg}} \right)$$

$$y_b = 9.98 \times 10^4 \text{m} \approx 100 \text{km}$$

A altura real será cerca de somente dois terços deste valor.

EXEMPLO 2.15

O ônibus espacial tem sido descrito como uma incrível máquina voando. Embora o ônibus é também complexo para descrevermos completamente, podemos examinar a ascensão do lançamento fazendo algumas considerações. Dois sistemas primários levantam a nave do chão para a órbita. O principal mecanismo do ônibus espacial (SSME) constitui-se de três outros mecanismos interiores a nave, queimando hidrogênio líquido (LH_2) e oxigênio líquido (LO_2) armazenados em um grande tanque preso a parte externa para a nave decolar. O principal impulso provém de dois foguetes auxiliados por combustíveis sólidos (SRB) presentes nos lados externos do tanque. Ambos sistemas realizam a queima durante os dois primeiros minutos de lançamento, depois que o combustível no SRB é consumido as armações SRB são lançadas ao mar (Figura 2-19) para serem resgatadas depois no oceano. Durante os próximos $6\frac{1}{2}$ minutos

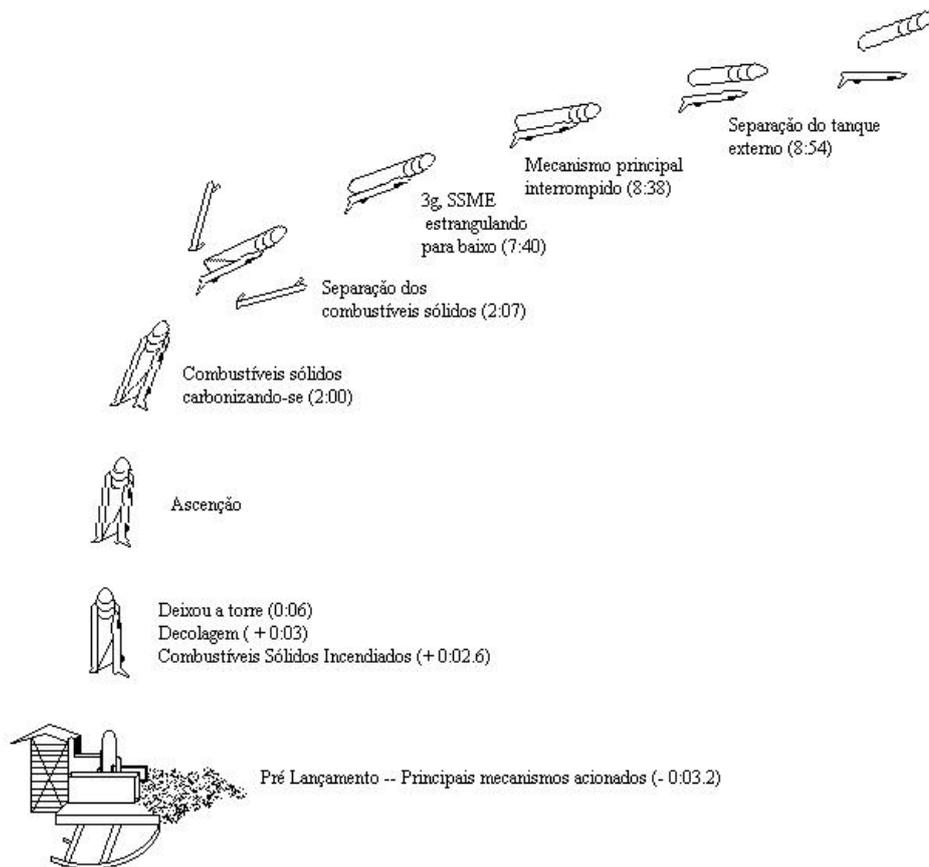


FIGURA 2-19 Lançamento e ascensão do ônibus espacial, colocando a nave em órbita. O tempo está descrito entre parênteses ao lado do evento (minutos:segundos).

os SSMEs mantêm o ônibus espacial em ascensão e fornecem a maior parte da velocidade horizontal necessária para entrar em órbita.

Embora não seja totalmente correto, assumimos que o foguete está se movendo verticalmente durante a queima do SRB (2 minutos) e calculamos a velocidade e altura do ônibus. Também assumimos que durante os próximos $6\frac{1}{2}$ minutos de vôo o ônibus está se movendo 45° para a horizontal, e calculamos sua velocidade orbital.

Os dados específicos para as três principais partes do ônibus espacial para uma típica altura são*

Nave Espacial (atual spaçonave/aeronave):

Massa com carga paga: 105,000 Kg

Tanque Externo (combustível para SSME):

Tanque cheio: 36,000 Kg

Combustíveis LH_2 e LO_2 : 7.2×10^5 Kg

Massa total carregada: 7.56×10^5 Kg

SRBs (dois):

Massa total quando vazio: 1.68×10^5 Kg

Combustível Sólido: 1.01×10^6 Kg

Massa total carregada: 1.18×10^6 Kg

Massa total do ônibus espacial abastecido no lançamento: 2.04×10^6 Kg

Propulsão de todos os SSMEs: 5.0×10^6 N

Propulsão de todos os SRBs: 23.6×10^6 N

Propulsão total no lançamento: 28.6×10^6 N

Embora os SSMEs queimem em diferentes níveis de energia para manter a aceleração inferior a $3g$ (porque existem limitações na estrutura da nave, não por causa dos astronautas), assumimos que os SSMEs queimam de maneira constante durante $8\frac{1}{2}$ minutos completos.

Solução: Durante os 2 primeiros minutos, quando ambos sistemas mecânicos estão em aquecimento, não é errado se adicionarmos o impulso para ambos sistemas, para encontrar a dm/dt total, e usar a Equação 2.123 para encontrar uma velocidade média de escape u .

Primeiros 120 segundos:

$$\Delta m(SRB) = 1.01 \times 10^6 \text{ Kg}$$

$$\Delta m(SSME) = \left(\frac{2}{8.5}\right) 7.2 \times 10^5 \text{ Kg} = 1.7 \times 10^5 \text{ Kg}$$

$$\frac{dm}{dt} = -\frac{1.18 \times 10^6 \text{ Kg}}{120 \text{ s}} = -9800 \text{ Kg/s}$$

Da Equação 2.127, $\alpha = 9800 \text{ Kg/s}$.

*Os dados são de K. M. Joels, G. P. Kennedy, e D. Larkin, *O Manual de Operações do Ônibus Espacial* (New York: Ballantine, 1982).

$$u = \frac{\text{Impulso}}{-dm/dt} = \frac{28.6 \times 10^6 N}{9800 Kg/s} = 2900 m/s$$

$$m_0 = 2.04 \times 10^6 Kg$$

$$\text{Combustível carbonizado} = 1.18 \times 10^6 Kg$$

$$m = 0.86 \times 10^6 Kg$$

Calculamos a velocidade de carbonização usando a Equação 2.130:

$$v = \frac{9.8 m/s^2 (1.18 \times 10^6 Kg)}{9800 Kg/s} + (2900 m/s) \ln \left(\frac{2.04}{0.86} \right)$$

$$v = 1325 m/s \approx 2900 MPH$$

A altura pode ser determinada pela Equação 2.133:

$$v = 2900 m/s (120 s) - \left(\frac{1}{2} \right) 9.8 m/s^2 (120 s)^2 - \frac{(0.86 \times 10^6 Kg) \cdot (2900 m/s)}{9800 Kg/s} \ln \left(\frac{2.04}{0.86} \right) = 58 Km \approx 36 miles$$

Os valores atuais na combustão completa do SRB estão em torno de $v = 1300 m/s$ e $y = 45 Km$.

Com o tempo as armações SRB são lançadas ao mar, o ônibus inicia o giro em torno de si preparando-se para entrar em órbita. Na direção horizontal, o vôo ocorre como se estivesse em um espaço livre (desprezando a resistência do ar, a qual é pequena a uma altitude de 50 Km). A propulsão dos SSMEs não é suficiente para acelerar o ônibus verticalmente, mas mantém o ônibus para este pousar suavemente. Vamos assumir que agora o ângulo de ascensão é em média 45° e usar a Equação 2.118 para calcular a velocidade horizontal.

$$m_0 \text{ (após lançar as armações SRB): } 6.9 \times 10^5 \text{ Kg}$$

$$\text{Combustível localizado no tanque externo: } 5.5 \times 10^5 \text{ Kg}$$

$$m \text{ (após interromper SSME): } 1.4 \times 10^5 \text{ Kg}$$

Calculamos a velocidade de escapamento do SSME usando a Equação 2.123:

$$u = -\frac{\text{impulso}}{dm/dt}$$

$$\frac{dm}{dt}(SSME) = -\frac{5.5 \times 10^5 Kg}{6.5 \text{min} \frac{60s}{\text{min}}} = -1400Kg/s$$

$$u = \frac{-5 \times 10^6 N}{-1400Kg/s} = 3550m/s$$

$$u_{horz} = 3550m/s(\cos 45^\circ) = 2500m/s$$

$$u_{horz} = (2500m/s) \ln \left(\frac{6.9}{1.4} \right)$$

$$= 4000m/s \approx 8900MPH$$

Após esgotar todo o combustível do tanque externo, os SSMEs desligam e o tanque externo é lançado ao mar. O sistema que manobra a nave consiste de dois mecanismos propulsores de (27,000-N) , eventualmente colocando a nave na posição correta da orbita com uma velocidade de aproximadamente 8,000 m/s e altitude de 400 Km.

2.8 LIMITAÇÕES DA MECÂNICA NEWTONIANA

Neste capítulo, introduzimos conceitos como posição, tempo, momento e energia. Concluímos que todas são grandezas mensuráveis e que podem ser especificadas com alguma precisão desejada, dependendo somente do grau de sofisticação dos instrumentos de medida. De certo, esta implicação aparenta ser verificada em nossas experiências com todos os objetos macroscópicos. Em qualquer instante do tempo, por exemplo, podemos medir com grande precisão a posição de, por exemplo, um planeta em órbita em torno do sol. Uma série de tais medições nos permite determinar (também com grande precisão) a velocidade do planeta em qualquer posição.

Quando tentamos fazer medições de objetos microscópicos, entretanto, encontramos uma limitação fundamental na precisão dos resultados. Por exemplo, podemos (satisfatoriamente) medir a posição de um elétron pelo espalhamento de um fóton de luz pelo elétron. O caráter ondulatório do fóton impede uma medição exata, e só podemos determinar a posição do elétron dentro de uma incerteza Δx relacionada com o *tamanho* (isto é, comprimento de onda) do fóton. Pelo próprio ato de medição, entretanto, induzimos uma mudança de estado do elétron, pois o espalhamento do fóton transmite momento ao elétron. Este momento possui uma incerteza Δp . O produto $\Delta x \Delta p$ é uma medida da precisão com a qual podemos medir simultaneamente a posição e o momento e relacionado a este, a velocidade; $\Delta x \rightarrow 0, \Delta p \rightarrow 0$ implica uma medição com uma precisão inimaginável. Foi mostrado pelo físico alemão Werner Heisenlug (1901-1976) em 1927, que este produto deve ser sempre maior que um certo valor mínimo.* Não podemos então, especificar simultaneamente ambos posição e momento do elétron com uma precisão infinita, pois para $\Delta x \rightarrow 0$, então $\Delta p \rightarrow \infty$ pelo **Princípio da Incerteza de Heisenberg**[†] poder ser satisfatório.

*Este resultado pode ser aplicado para medidas de energia num tempo particular, em cada caso o produto é certamente $\Delta E \Delta t$ (Possuindo as mesmas dimensões $\Delta x \Delta p$).

[†]N.T.: muitos físicos preferem se referir a este princípio como o *Princípio da Imprecisão*.

O valor mínimo de $\Delta x \Delta p$ é da ordem de $10^{-34} J\dot{s}$. Isto é extremamente pequeno para padrões macroscópicos, para objetos na escala-laboratório não existe dificuldade prática em fazer-se medições simultâneas de posição e momento. As leis de Newton podem portanto ser aplicadas se a posição e o momento podem ser precisamente definidos. Mas pelo Princípio da Incerteza, a mecânica Newtoniana não pode ser aplicada à sistemas microscópicos. Para solucionar estas dificuldades fundamentais no sistema newtoniano, um novo método para tratar fenômenos microscópicos foi desenvolvido no início de 1926. O trabalho de Ervin Schrödinger (1887-1961), Heisenlug, Max Born(1872-1970), Paul Dirac (1902-1984) e outros subseqüentemente colocaram esta nova disciplina sobre uma firme fundamentação. A mecânica Newtoniana, então, é perfeitamente adequada para descrever fenômenos em larga escala. Porém, precisamos da nova mecânica (mecânica quântica) para analisar processos no domínio atômico. Quanto mais o tamanho do sistema aumenta de escala, a mecânica quântica tende à mecânica newtoniana.

Em adição as limitações fundamentais da mecânica Newtoniana, como na aplicação a objetos microscópicos, existe uma dificuldade inerente no esquema Newtoniano – o que reside no conceito de tempo. Na visão Newtoniana, o tempo é *absoluto*, isto é, supõe-se que seja sempre possível determinar sem ambigüidade quando dois eventos ocorreram simultaneamente ou quando um precedeu o outro. Para decidir a seqüência temporal de eventos, os dois observadores devem estar em comunicação instantânea, através de algum tipo de sinal ou estabelecendo-se dois relógios em sincronismo exato em seus pontos de observação. Porém, a sincronização dos relógios para ser exata requer o conhecimento do tempo de trânsito de um sinal *na direção* de um observador para o outro (podemos conseguir isto dispoendo de dois relógios sincronizados, mas isto é um argumento circular). Quando realmente medimos a velocidade dos sinais, entretanto, sempre obtemos uma velocidade *média* de propagação em direções opostas. E para criar um experimento que meça a velocidade somente em *uma* direção de propagação inevitavelmente nos leva a introdução de novas generalizações que não podemos determinar antes do experimento.

Sabemos que comunicação instantânea por sinalização é impossível: interações entre corpos materiais propagam-se com uma velocidade finita, e uma interação de algum tipo deve ocorrer para que um sinal seja transmitido. A velocidade *máxima* de propagação de qualquer sinal é a velocidade da luz no espaço livre(vácuo): $c \cong 3 \times 10^8 m/s$.*

As dificuldades em estabelecer-se uma escala de tempo entre corpos separados nos leva acreditar que o tempo, afinal de contas, não é absoluto, e que o tempo e o espaço estão de alguma maneira intimamente relacionados. A solução para este dilema foi encontrada no período de 1904-1905 por Hendrik Lorenz (1853-1928), Henri Poincaré (1854-1912) e Albert Einstein (1879-1955) e foi resumido na **teoria especial da relatividade** (ver Capítulo 14).

A mecânica Newtoniana está, portanto, sujeita a limitações fundamentais quando pequenas distâncias ou grandes velocidades são encontradas. Dificuldades com a mecânica Newtoniana também podem ocorrer quando objetos extremamente massivos ou enormes distâncias estão envolvidas. Uma limitação prática também ocorre quando o sistema é constituído por um grande número de corpos. No Capítulo 8, veremos que podemos obter uma solução geral de maneira concisa para o movimento de um sistema constituído de mais de dois corpos em interação mesmo que esta seja simplesmente gravitacional. Para calcular o movimento num sistema, de três corpos, devemos recorrer a procedimentos de aproximação numérica. Embora tal método seja, em princípio, capaz de qualquer exatidão desejada, o trabalho envolvido é considerável. O movimento de sistemas ainda mais complexos (por exemplo, o sistema composto de todos grandes objetos no sistema solar) pode, da mesma maneira, ser computado, mas o procedimento se torna rapidamente muito *pesado* para ser utilizado para qualquer sistema grande. Para calcular o movimento de moléculas individuais em, digamos, um centímetro cúbico de gás contendo $\approx 10^{19}$ moléculas é claramente impossível. Um método bem sucedido de calcular as propriedades *médias* de tais sistemas foi desenvolvido na segunda metade do século dezanove por Boltzman, Maxwell, Gibbs, Liouville

*A velocidade da luz é bem definida como 299,792,458.0 m/s fazendo comparações com outras medidas mais padronizadas. Metro é a definição de distância viajada pela luz no vácuo durante um intervalo de tempo de 1/299,792,458 de um segundo.

e outros. Estes procedimentos permitiram a dinâmica dos sistemas serem calculados através da teoria de probabilidades, e uma *mecânica estatística* foi desenvolvida. Alguns comentários sobre a formulação de conceitos estatísticos em mecânica podem ser encontrados na Seção 7.13.

P R O B L E M A S

- 2-2.** Uma partícula de massa m é forçada a mover-se na superfície de uma esfera de raio R por uma força aplicada $\mathbf{F}(\theta, \phi)$. Escreva a equação do movimento.
- 2-5.** Um piloto de um jato de guerra percebe que é capaz de suportar uma aceleração de $9g$ antes de ser jogado para fora. O piloto aponta para baixo no plano vertical dele até mover-se a uma velocidade de Mach 3 e pretende virar-se para cima em uma manobra circular antes de colidir contra o solo. **(a)** Onde ocorre a aceleração máxima na manobra? **(b)** Qual o círculo mínimo que o piloto pode empregar?
- 2-6.** Na nevasca de 88, uma vaqueira foi forçada a soltar fardos de feno de um aeroplano para alimentar sua criação de gado. O aeroplano voou horizontalmente a 160 Km/h e abandonou os fardos a uma altura de 80 m sobre o plano alcançado. **(a)** Ela procura os fardos aterrizados sobre a forragem 30 m atrás do gado de modo que não chega a encontrá-los. Onde ela deveria soltar os fardos do aeroplano? **(b)** Para não encontrar o gado, qual é o grande erro de tempo que ela cometeu ao empurrar os fardos para fora do aeroplano? Despreze a resistência do ar.
- 2-7.** Inclua a resistência do ar para os fardos de feno no problema anterior. Um fardo de feno tem aproximadamente 30 Kg e uma área média de aproximadamente $0.2m^2$. Considere a resistência como sendo proporcional ao quadrado da velocidade e considere $c_W = 0.8$. Esboçe as trajetórias com um computador se os fardos de feno aterrizam 30m atrás do gado para ambas situações, ou seja, com e sem resistência do ar. Se os fardos de feno foram liberados ao mesmo tempo nos dois casos, qual é a distância entre as posições de aterrissagem dos fardos?
- 2-10.** Repita o Exemplo 2.4 executado por uma calculadora usando um computador para resolver a Equação 2.22. Use os seguintes valores: $m = 1Kg$, $v_0 = 10m/s$, $x_0 = 0$, e $k = 0.1s^{-1}$. Esboçe os planos de v versus t , x versus t , e v versus x . Compare com os resultados do Exemplo 2.4 para ver se seus resultados são razoáveis.
- 2-11.** Considere uma partícula de massa m que se mantém do início até o fim do movimento em um campo gravitacional constante. Se uma força de resistência proporcional ao quadrado da velocidade (isto é, kmv^2) é encontrada, mostre que a distância s da queda da partícula em aceleração de v_0 para v_1 é dada por

$$s(v_0 \rightarrow v_1) = \frac{1}{2k} \ln \left[\frac{g - kv_0^2}{g - kv_1^2} \right]$$

- 2-12.** Uma partícula está projetada verticalmente para cima em um campo gravitacional constante com uma velocidade inicial v_0 . Mostre que se há uma força de retardamento proporcional ao quadrado da velocidade instantânea, a velocidade da partícula quando ela retorna a sua posição inicial é

$$\frac{v_0 v_t}{\sqrt{v_0^2 + v_t^2}}$$

onde v_t é a velocidade final (terminal).

- 2-13.** Uma partícula move-se sob a influência de uma força de retardamento equivalente a $mk(v^3 + a^2v)$, onde k e a são constantes. Mostre que para alguns valores de velocidade inicial a partícula nunca irá se mover a uma distância maior do que $\pi/2ka$ e que a partícula cessa o movimento somente para $t \rightarrow \infty$.

- 2-15.** Uma partícula de massa m escorrega para baixo em um plano inclinado sob influência da gravidade. Se o movimento é contido por uma força $f = kmv^2$, mostre que o tempo requerido para a partícula mover-se a uma distância desde o início até cessar o movimento é

$$t = \frac{\cosh^{-1}(e^{kd})}{\sqrt{kg \sin \theta}}$$

onde θ é o ângulo de inclinação do plano.

- 2-17.** Um forte jogador bate na bola elevando-a a uma altura de 0.7 m acima de uma casa. Todas as batidas dos jogadores possuem um ângulo de elevação de 35° e movem-se em direção a um muro de 2 m de altura e 60 m distante do centro do campo. Qual a velocidade inicial necessária para a bola deixar o centro do campo ao muro? Ignore a resistência do ar.
- 2-18.** Inclua a resistência do ar proporcional ao quadrado da velocidade da bola no problema precedente. Considere o coeficiente de resistência $c_w = 0.5$, o raio da bola como 5 cm e uma massa de 200 g. **(a)** Encontre a velocidade inicial da bola necessária para alcançar o muro. **(b)** Para esta velocidade, encontre o ângulo de elevação inicial que permite à bola facilmente alcançar o muro. Agora a bola pode verticalmente alcançar o muro?
- 2-19.** Se um projétil move-se tal que a distância do ponto de projeção é sempre crescente, encontre o ângulo horizontal máximo com que a partícula pode ter sido projetada. (Assuma que não existe resistência do ar)
- 2-20.** Um extintor de incêndio projeta seu jato em um corpo de massa $10kg$, do tipo a que as curvas de Figura 2-3 se aplicam. A velocidade do jato é $140m/s$. Com que ângulo deve estar o tambor elevado para bater em um alvo no mesmo plano horizontal que o extintor e $100m$ distante? Compare os resultados com aqueles para o exemplo sem retardamento.
- 2-22.** O movimento de uma partícula carregada em um campo eletromagnético pode ser obtido pela **Equação de Lorentz** * para a força em uma partícula em tal campo. Se o vetor do campo elétrico for \mathbf{E} e o vetor do campo magnético for \mathbf{B} , a força em uma partícula de massa m carrega com uma carga q que tem uma velocidade \mathbf{v} é dada por

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

onde assumimos que $v \ll c$ (velocidade da luz).

- (a)** Se não houver nenhum campo elétrico e se a partícula entra num campo magnético em sentido perpendicular às linhas do fluxomagnético, mostre que a trajetória é um círculo com raio

$$r = \frac{mv}{qB} = \frac{v}{\omega_c}$$

onde $\omega_c \equiv qB/m$ é a *frequência do ciclotron*.

- (b)** Escolha a posição do eixo z no sentido de \mathbf{B} e deixe o plano \mathbf{E} e \mathbf{B} contido no plano xy . Assim

$$\mathbf{B} = B\mathbf{k}, \quad \mathbf{E} = E_y\mathbf{j} + E_z\mathbf{k}$$

mostre que as componentes do movimento para z são

$$z(t) = z_0 + \dot{z}_0 t + \frac{qE_z}{2m} t^2$$

onde

$$z(0) \equiv z_0 \quad \text{e} \quad \dot{z}(0) \equiv \dot{z}_0$$

*Veja, por exemplo, Heald e Marion, Radiação Eletromagnética Clássica (95, Seção 1.7).

- (c) Continue o cálculo e obtenha as expressões para $\dot{x}(t)$ e $\dot{y}(t)$. Mostre que as médias do tempo destes componentes da velocidade são

$$\langle \dot{x} \rangle = \frac{E_y}{B}, \quad \langle \dot{y} \rangle = 0$$

(Mostre que o movimento é periódico e então a média sobre um período completo)

- (d) Integre as equações da velocidade encontradas em (c) e mostre (com as condições iniciais $x(0) = -A/\omega_c$, $\dot{x}(0) = E_y/B$, $y(0) = 0$, $\dot{y}(0) = A$) que

$$x(t) = \frac{-A}{\omega_c} \cos \omega_c t + \frac{E_y}{B} t, \quad y(t) = \frac{A}{\omega_c} \sin \omega_c t$$

Estas são as equações paramétricas de um cicloide. Esboce a projeção da trajetória no plano xy para os casos (i) $A > |E_y/B|$, (ii) $A < |E_y/B|$, e (iii) $A = |E_y/B|$. (O último caso dá um cicloide.)

- 2-27.** Uma corda que possui uma massa total de 0.4kg e comprimento total de 4m tem 0.6m de corda suspensa verticalmente para baixo. Quanto trabalho deve ser feito para situar a corda na bancada?
- 2-28.** Uma superbola de massa M e uma bola de gude de massa m são lançadas de uma altura h com a bola de gude exatamente no topo da superbola. Uma superbola tem um coeficiente de restituição perto de 1 (i.e., sua colisão é essencialmente elástica). Ignore o tamanho da superbola e da bola de gude. A superbola colide com o solo, rebate e bate na bola de gude, a qual move-se novamente para cima. Considerando que o movimento oferece resistência, explique a elevação do movimento e qual a elevação da grande bola.
- 2-29.** Um automóvel trafegando em uma estrada com grau de inclinação de 8% , colide fortemente e derrapa 30m antes de parar totalmente. Um perito mediu o coeficiente de fricção cinético entre os pneus e a estrada como sendo igual a $\mu_k = 0.45$. O perito está correto em afirmar que o motorista excedeu o limite de velocidade em 25MPH ? Explique.
- 2-30.** Um estudante solta um balão cheio d'água do telhado de um alto edifício urbano tentando atingir seu companheiro de quarto no solo (que está apressado). O primeiro estudante baixa a cabeça para trás ouvindo distante o barulho da água 4.021 s após a queda do balão. Se a velocidade do som é 331 m/s , encontre a altura do edifício, desprezando a resistência do ar.
- 2-31.** No Exemplo 2.10, a velocidade inicial de aproximação da partícula carregada não possui componente ao longo do eixo x . Mostre que, mesmo que ela possuísse um componente x , o movimento subsequente da partícula seria o mesmo – que somente o raio da hélice seria alterado.
- 2-33.** Execute um cálculo de computador para um objeto que move-se verticalmente no ar sob a gravidade e que experimenta uma força de retardamento proporcional ao quadrado da velocidade do objeto (veja a Equação 2.21). Use as variáveis m para a massa e r para o raio do objeto. Todos os objetos são deixados cair do repouso do alto de um edifício $100 - m - \text{tall}$. Use um valor de $c_w = 0.5$ e trace um plano no computador da altura y , velocidade v , e aceleração a contra t para as seguintes condições e responda às perguntas:
- (a) Uma bola de beisebol de $m = 0.145\text{ Kg}$ e $r = 0.0366\text{ m}$.
- (b) Uma bola de ping-pong de $m = 0.0024\text{ Kg}$ e $r = 0.0019\text{ m}$.
- (c) Um pingo de chuva de $r = 0.003\text{ m}$.
- (d) Todos os objetos alcançam suas velocidades terminais? Discuta os valores das velocidades terminais e explique suas diferenças.

- (e) Como pode uma bola de beisebol ser jogada mais distante do que uma esfera do ping-pong mesmo que a bola de beisebol seja muito mais maciça?
- (f) Discuta as velocidades terminais de pingos de chuva grandes e pequenos. Qual as velocidades terminais dos pingos de chuva com raios 0.002 m e 0.004 m?
- 2-35.** Execute os cálculos numéricos do Exemplo 2.7 para os valores dados na Figura 2-8. Trace ambas as Figuras 2-8 e 2-9. Não duplique a solução no apêndice H; componha sua própria solução.
- 2-36.** A arma está localizada em uma ribanceira de altura h com vista para o vale do rio. Se a velocidade do míssil é v_0 , encontre a expressão para o alcance como uma função da elevação do ângulo da arma. Achar numericamente o máximo alcance fora do vale para uma determinada h e v_0 .
- 2-40.** Uma partícula movimenta-se numa órbita bi-dimensional definida por:

$$x(t) = A(2\alpha t - \sin \alpha t)$$

$$y(t) = A(1 - \cos \alpha t)$$

- (a) Encontre a aceleração tangencial a_t e a aceleração normal a_n como uma função de tempo onde as componentes tangenciais e normal são dadas em relação a velocidade.
- (b) Determine em quais momentos a_n tem um máximo na órbita.
- 2-41.** Um trem move-se ao longo de uma trilha com uma velocidade constante u . Uma mulher no trem joga uma bola de massa m para frente com uma velocidade v com respeito a si mesma.
- (a) Qual é a energia cinética ganha pela bola em relação a medida por uma pessoa no trem?
- (b) para uma pessoa de pé sobre a via férrea? (c) Qual o trabalho feito pela mulher para jogar a bola e (d) do trem?
- 2-42.** Um cubo sólido de densidade uniforme e lado b está em equilíbrio no topo do cilindro de raio R (Figura 2-C). Os planos dos quatro lados do cubo são paralelos ao eixo do cilindro. O contato entre o cubo e a esfera é perfeitamente áspero. Sob quais condições o equilíbrio é estável ou não?
- 2-44.** Resolva o Exemplo 2.12 usando de preferência forças no lugar de energias. Como você pode determinar se o sistema encontra-se em equilíbrio instável ou estável?
- 2-45.** Descreva como se determina se um equilíbrio é estável ou instável quando $(d^2U/dx^2)_0 = 0$.
- 2-49.** Um foguete extremamente bem-construído tem uma massa (m_0/m) de 10, um novo combustível é desenvolvido tendo como velocidade da exaustão $4,500m/s$. A uma taxa constante para $300s$. Calcule a velocidade máxima deste foguete de estágio único, com aceleração constante presumido da gravidade. Se a velocidade do escape de uma partícula da terra for $11.3km/s$, pode um foguete de estágio único similar com a mesma razão de massa e velocidade de exaustão ser construído para alcançar a lua?
- 2-50.** Uma gota da água que cai na atmosfera é esférica. Suponha que como a gota passa através de uma nuvem, adquire massa a uma taxa proporcional a kA onde k é uma constante (> 0) e A sua área de seção transversal. Considere uma gota de raio inicial r_0 que entra em uma nuvem com velocidade v_0 . Assuma que não há forças resistivas e mostre (a) que o raio aumenta linear com o tempo, e (b) que se o r_0 for pequeno podendo ser desprezível então a velocidade aumenta linearmente com o tempo dentro da nuvem.
- 2-51.** Um foguete num espaço distante de campo gravitacional desprezível começa do repouso a acelerar uniformemente até uma velocidade v . A massa inicial do foguete é m_0 . Quanto trabalho faz o motor do foguete?

- 2-52. Considere um foguete de estágio único que faz exame fora da órbita da terra em que a altura do foguete na queima total de combustível está dada pela Equação 2.133. Quanto mais distante na altura irá o foguete após a queima total do combustível?
- 2-53. Um foguete tem uma massa inicial m e uma taxa de combustão do combustível α (Equação 2.127). Qual é a velocidade mínima da exaustão que permita que o foguete levante imediatamente depois do acendimento?
- 2-54. Um foguete possui uma massa inicial de $7 \times 10^4 \text{Kg}$ e no disparo queima-se combustível na taxa de 250Kg/s . A velocidade de escape é 2.500m/s . Se o foguete tem uma subida vertical partindo da Terra, quanto tempo depois do disparo do motor do foguete será a decolagem do foguete? O que está errado com o projeto deste foguete?
- 2-55. Considere um foguete de n estágios, com cada velocidade de descarga u . Cada estágio do foguete tem a mesma proporção de consumo ($k = m_i/m_f$). Mostre que a velocidade final do estágio n th é $nu \ln k$.
- 2-56. Para realizar um salvamento, uma embarcação lunar precisa pairar exatamente acima da superfície da lua, a qual tem uma aceleração gravitacional de $g/6$. A velocidade de exaustão é $2,000 \text{m/s}$, mas a quantidade de combustível a ser usado é provavelmente apenas 20% da massa total. Por quanto tempo pode a embarcação pairar?
- 2-57. Um novo lança projétil é desenvolvido no ano de 2013 que pode lançar uma sonda esférica de 10^4kg com velocidade inicial de $6,000 \text{m/s}$. Para propósitos de testes, objetos são lançados verticalmente.
- Desconsiderando a resistência do ar e assumindo a aceleração da gravidade constante. Determine a altura que o objeto lançado pode alcançar acima da superfície da terra.
 - Se o objeto tem raio de 20cm e a resistência do ar é proporcional ao quadrado da velocidade do objeto com $C_w = 0.2$. Determine a altura máxima alcançada, assumindo que a densidade do ar é constante.
 - Agora também inclua o fato que a aceleração da gravidade decresce quando o objeto sobe acima da terra. Encontre a altura alcançada.
 - Agora considere os efeitos do decréscimo da densidade do ar com a altitude no cálculo. Podemos muito grosseiramente representar a densidade do ar por $\log_{10}(\rho) = -0.05h + 0.11$ onde ρ é a densidade em kg/m^3 e h é a altitude acima da terra em km . Determine que altura o objeto vai alcançar.
- 2-58. Um novo foguete com simples-estágio será desenvolvido em 2013, e terá uma velocidade de exaustão de gás de $4,000 \text{m/s}$. A massa total do foguete é de 10^5kg , com 90% dessa massa sendo combustível. O combustível queima rapidamente em 100s a uma taxa constante. Para propor um teste, o foguete é lançado verticalmente a partir da superfície da Terra. Dentro disso responda as partes **(a)** e **(d)** do problema anterior.